Elementare Stochastik (WS 2011/12)

Übungsblatt 11

Abgabe: Freitag, 20.01.12

Aufgabe 59)

(1.5+1.5+1 Punkte, *)

Es sei $(X, Y)'$ ein Zufallsvektor mit Dichte

$$f(x, y) = \begin{cases} a, & 0 \leq y \leq 1 - |x|, |x| \leq 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für ein passendes $a \in \mathbb{R}$.

- Bestimmen Sie a .
- Bestimmen Sie die marginalen Verteilungen von X und Y .
- Sind X und Y unabhängig?

Aufgabe 60)

(2+2 Punkte)

Die Zufallsvariablen X und Y seien i.i.d. standardnormalverteilt.

- Bestimmen Sie die Dichte von $(X, Y/X)'$.
- Bestimmen Sie daraufhin die Dichte von Y/X . Welcher bekannten Verteilung folgt dieser Quotient?

Aufgabe 61)

(2+2 Punkte)

Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ seien stochastisch unabhängig mit $X_j \sim F_j$.

- Zeigen Sie, dass für $y \in \mathbb{R}$ gilt
 - $P(\max_{j=1, \dots, n} X_j \leq y) = \prod_{j=1}^n F_j(y)$,
 - $P(\min_{j=1, \dots, n} X_j \leq y) = 1 - \prod_{j=1}^n (1 - F_j(y))$.

b) Bestimmen Sie im Falle identisch verteilter Zufallsvariable $X_1, \dots, X_n$, d.h. $F_j = F$ für alle j , und unter der Voraussetzung, dass F absolut stetig ist mit Dichte f , die Dichten von $\max_{j=1, \dots, n} X_j$ und $\min_{j=1, \dots, n} X_j$.

Aufgabe 62)

(2+2 Punkte, *)

Der Zufallsvektor $(X, Y)'$ sei gleichverteilt auf dem Dreieck $\{(x, y)' \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$.

a) Bestimmen Sie die bedingte Dichte $f_{Y|X}$.

b) Welche Verteilung besitzt Y gegeben das Ereignis $\{X = x\}$?

Aufgabe 63)

(4 Punkte, L)

Seien $\mathbf{X} \sim N_d(\mu, \Sigma)$ ein d -dimensionaler, normalverteilter Zufallsvektor sowie $A \in \mathbb{R}^{k \times d}$ und $B \in \mathbb{R}^{l \times d}$ Matrizen mit vollem Rang. Zeigen Sie, dass im Falle $A\Sigma B' = 0$ die Zufallsvektoren $A\mathbf{X}$ und $B\mathbf{X}$ unabhängig sind.

Aufgabe 64)

(2+2 Punkte, L)

Gegeben sei ein Linienraster von zueinander parallelen Geraden mit Abstand 1, auf das wir zufällig eine Nadel der Länge $2a$ mit $0 < a < 1/2$ werfen. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel eine der Linien schneidet.

Modelliert wird dieses Experiment durch zwei auf $[0, 1]$ bzw. $[0, 2\pi]$ gleichverteilte, unabhängige Zufallsvariable X und Φ . Hierbei beschreibt X den Abstand des Mittelpunktes der Nadel zur nächsten darunterliegenden Linie sowie Φ den Winkel zwischen der Nadel und einer die Linien im rechten Winkel kreuzenden Geraden.

a) Skizzieren Sie das Experiment grafisch und bestimmen Sie die Dichte des Zufallsvektors $(X, \Phi)'$.

b) Zeigen Sie, dass das gesuchte Ereignis „die Nadel kreuzt eine der Linien“ beschrieben wird durch

$$\{a|\cos \Phi| > X\} \cup \{1 - a|\cos \Phi| < X\}$$

und berechnen Sie damit die gesuchte Wahrscheinlichkeit.