

Elementare Stochastik (WS 2011/12)

Übungsblatt 12

Abgabe: Freitag, 27.01.12

Aufgabe 65)

(1+1.5+1.5 Punkte, *)

Ein Experiment, bei dem ein Ereignis A mit Wahrscheinlichkeit 0.1 eintritt, wird 50 mal unabhängig voneinander wiederholt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass A dabei höchstens dreimal eintritt,

- durch exakte Rechnung,
- approximativ mit Hilfe der Poissonapproximation, sowie
- approximativ mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes.

Aufgabe 66)

(2+2 Punkte, *)

Bei einem Spiel zwischen Spieler A und Spieler B wird eine faire Münze in unabhängiger Folge geworfen. Bei dem Ergebnis 'Kopf' zahlt B an A einen Euro, bei Ausgang 'Zahl' ist es umgekehrt. Die Zufallsvariable S_n beschreibe den Gewinn von Spieler A nach n Spielen. Zeigen Sie

- $\lim_{n \rightarrow \infty} P(-100 \leq S_n \leq 100) = 0$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} P(-\sqrt{n} \leq S_n \leq \sqrt{n}) = 2\Phi(1) - 1 \approx 0.682$.

Aufgabe 67)

(2+2 Punkte)

Der Zufallsvektor $(X_1, \dots, X_n)'$ sei multivariat standardnormalverteilt.

- Bestimmen Sie die Verteilung von $Y_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$.
- Bestimmen Sie den punktweisen Grenzwert der Verteilungsfunktion F_{Y_n} von Y_n für $n \rightarrow \infty$? Vergleichen Sie hierzu F_{Y_n} mit der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung. Ist der Grenzwert eine Verteilungsfunktion?

Aufgabe 68)

(2+2 Punkte)

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit $EX_1^2 < \infty$. Weiter sei

$$S_n^* = \frac{X_1 + \dots + X_n - nEX_1}{\sqrt{n\text{Var}X_1}}$$

und F_n bezeichne die Verteilungsfunktion von S_n^* .

a) Seien $p \in (0, 1)$ und $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass für genügend großes n gilt

$$Q_p(F_n) \geq Q_p(\Phi) - \varepsilon, \quad Q_p(F_n) \leq Q_p(\Phi) + \varepsilon.$$

b) Folgern Sie, dass für beliebiges $p \in (0, 1)$ das p -Quantil von F_n gegen das p -Quantil von Φ konvergiert,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_p(F_n) = Q_p(\Phi).$$

Aufgabe 69)

(4 Punkte, L)

An der Salatbar einer Mensa kostet der Salat 1 Euro / 100 g. Der Salat wird gewogen und der Betrag zwecks leichter Bezahlbarkeit auf ein Vielfaches von 50 Cent auf- oder abgerundet. Wie hoch ist das Risiko, dass der Student nach 192 maligem Salatessen durch die Rundung einen Nachteil von mehr als 3 Euro hat, wenn er das Salatgewicht vorher nicht abschätzt, der Rundungsfehler also als auf dem Intervall $[-0.25, 0.25]$ gleichverteilt angenommen wird?

Aufgabe 70)

(4 Punkte, L)

Eine Fluggesellschaft weiß aus Erfahrung, dass ein gebuchter Linienflug nur mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.9$ angetreten wird. Sie akzeptiert deshalb mehr Buchungen, als tatsächlich Plätze vorhanden sind. Wieviele Buchungen darf sie akzeptieren, wenn 150 Plätze zur Verfügung stehen und die Wahrscheinlichkeit einer Überbelegung kleiner als 0.05 sein soll? Nehmen Sie dabei an, dass die Passagiere den Flug unabhängig voneinander antreten, und approximieren Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes mit Stetigkeitskorrektur.

Tabelle 1: Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung. Tabelliert sind die Werte $\Phi(x + \Delta x)$

x	Δx									
	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500	0.504	0.508	0.512	0.516	0.520	0.524	0.528	0.532	0.536
0.1	0.540	0.544	0.548	0.552	0.556	0.560	0.564	0.567	0.571	0.575
0.2	0.579	0.583	0.587	0.591	0.595	0.599	0.603	0.606	0.610	0.614
0.3	0.618	0.622	0.626	0.629	0.633	0.637	0.641	0.644	0.648	0.652
0.4	0.655	0.659	0.663	0.666	0.670	0.674	0.677	0.681	0.684	0.688
0.5	0.691	0.695	0.698	0.702	0.705	0.709	0.712	0.716	0.719	0.722
0.6	0.726	0.729	0.732	0.736	0.739	0.742	0.745	0.749	0.752	0.755
0.7	0.758	0.761	0.764	0.767	0.770	0.773	0.776	0.779	0.782	0.785
0.8	0.788	0.791	0.794	0.797	0.800	0.802	0.805	0.808	0.811	0.813
0.9	0.816	0.819	0.821	0.824	0.826	0.829	0.831	0.834	0.836	0.839
1.0	0.841	0.844	0.846	0.848	0.851	0.853	0.855	0.858	0.860	0.862
1.1	0.864	0.867	0.869	0.871	0.873	0.875	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.885	0.887	0.889	0.891	0.893	0.894	0.896	0.898	0.900	0.901
1.3	0.903	0.905	0.907	0.908	0.910	0.911	0.913	0.915	0.916	0.918
1.4	0.919	0.921	0.922	0.924	0.925	0.926	0.928	0.929	0.931	0.932
1.5	0.933	0.934	0.936	0.937	0.938	0.939	0.941	0.942	0.943	0.944
1.6	0.945	0.946	0.947	0.948	0.949	0.951	0.952	0.953	0.954	0.954
1.7	0.955	0.956	0.957	0.958	0.959	0.960	0.961	0.962	0.962	0.963
1.8	0.964	0.965	0.966	0.966	0.967	0.968	0.969	0.969	0.970	0.971
1.9	0.971	0.972	0.973	0.973	0.974	0.974	0.975	0.976	0.976	0.977
2.0	0.977	0.978	0.978	0.979	0.979	0.980	0.980	0.981	0.981	0.982
2.1	0.982	0.983	0.983	0.983	0.984	0.984	0.985	0.985	0.985	0.986
2.2	0.986	0.986	0.987	0.987	0.987	0.988	0.988	0.988	0.989	0.989
2.3	0.989	0.990	0.990	0.990	0.990	0.991	0.991	0.991	0.991	0.992
2.4	0.992	0.992	0.992	0.992	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.994
2.5	0.994	0.994	0.994	0.994	0.994	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995
2.6	0.995	0.995	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996
2.7	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997
2.8	0.997	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998
2.9	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999