Philipps-Universität Marburg Prof. Dr. Hajo Holzmann
Fb Mathematik u. Informatik Daniel Hohmann

Elementare Stochastik (WS 2011/12)

Übungsblatt 13

Abgabe: Freitag, 03.02.12

Aufgabe 71) **(3+3 Punkte)**

Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. poissonverteilt mit Parameter $\lambda = 1$ sowie $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, also $S_n \sim Poi(n)$. Weiter sei $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Folge in $\mathbb{N}$ mit

$$(k_n - n)/\sqrt{n} \longrightarrow x$$

für ein $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen sie, dass für $n \to \infty$ gilt $k_n/n \to 1$ sowie

$$\log\Big(\big(n/k_n\big)^{k_n} \exp\big(k_n - n\big)\Big) \longrightarrow -x^2/2\,.$$

Verwenden Sie für den zweiten Teil eine Taylor-Approximation der Funktion $g(t) = t\log(1/t) + t - 1$ um $t = 1$.

b) Folgern Sie

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,\mathrm{P}(S_n = k_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$$

unter Verwendung der Stirling'schen Formel.

Aufgabe 72) [Eintreten seltener Ereignisse] **(2+2+2 Punkte, *)**

Die Zufallsvariable X_p zähle die Anzahl an Misserfolgen bis zum ersten Eintritt eines Ereignisses mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$, d.h. $X_p \sim Geo(p)$.

a) Zeigen Sie, dass für Folgen $a_n \to \infty$ und $c_n \to 0$ mit $a_n c_n \to \lambda$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} (1 + c_n)^{a_n} = \exp(\lambda)\,.$$

b) Folgern Sie, dass für $p \to 0$ gilt

$$\mathrm{P}(pX_p > x) \longrightarrow \exp(-x)\,, \quad x \geq 0\,.$$

Die Anzahl an Misserfolgen vor dem Eintreten seltener Ereignisse ist also approximativ exponentialverteilt.

c) Beantworten Sie mit Hilfe von b) die folgende Frage: Wie hoch ist approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass ein Versuch, dessen Erfolgswahrscheinlichkeit bei nur $p = 0.01$ liegt, schon vor der 12. Wiederholung zu einem positiven Ergebnis führt?

Aufgabe 73) **(2+2 Punkte, *)**

Die Zufallsvariable T_r zähle die Anzahl der Misserfolge vor dem r-ten Treffer in einer unendlichen Reihe von Bernoulli-p-Experimenten, d.h. $T_r \sim Negbin(r, p)$.

a) Zeigen Sie, dass für $y \in \mathbb{R}$ mit $a_r = \sqrt{r(1-p)}$ gilt

$$\lim_{r\to\infty} \mathrm{P}\Big(T_r > \frac{a_r\big(y + a_r\big)}{p}\Big) = 1 - \Phi(y)\,.$$

b) Wie groß ist approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass bei fortgesetztem Werfen eines fairen Würfels die hundertste Sechs nach 650 Würfen nocht nicht gefallen ist?

Hinweis: Für $Y \sim Geo(p)$ gilt $\mathrm{E}Y = (1-p)/p$ und $\mathrm{Var}\,Y = (1-p)/p^2$.

Aufgabe 74) **(3+3 Punkte, L)**

a) Ein unverfälschter Würfel wird 100 mal geworfen. Es bezeichne S_{100} die Augensumme der Würfe. Bestimmen Sie ein minimales $k \in \mathbb{N}$, für das approximativ gilt

$$\mathrm{P}\big(350 - k \le S_{100} \le 350 + k\big) \ge 0.9\,.$$

b) Wie oft muss eine faire Münze geworfen werden, damit approximativ mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.95 die relative Anzahl der Würfe mit dem Ergebnis 'Kopf' zwischen 49 % und 51 % liegt?