Philipps-Universität Marburg
Fb Mathematik u. Informatik

Prof. Dr. Hajo Holzmann
Daniel Hohmann

Elementare Stochastik (WS 2011/12)

Übungsblatt 2

Abgabe: Freitag, 4.11.11

Aufgabe 7) **(2+2 Punkte, *)**

Seien (Ω, P) ein diskreter W-Raum sowie $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$ beliebige Ereignisse.

a) Zeigen Sie, dass für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} = 1\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie den *binomischen Lehrsatz* $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$, $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Folgern Sie damit, unter Verwendung der bereits bekannten *Einschluss-Ausschluss-Formel* und den Rechenregeln von *de Morgan*, dass gilt

$$\mathrm{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n} \mathrm{P}(A_{j_1} \cup \ldots \cup A_{j_k})\,.$$

Aufgabe 8) **(4 Punkte, *)**

Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine k-fach stetig differentierbare Funktion. Wie viele verschiedene partielle Ableitungen k-ter Ordnung besitzt f?

Hinweis: Beachten Sie den *Satz von Schwarz*.

Aufgabe 9) **(2+2 Punkte)**

Seien (Ω, P) ein diskreter W-Raum, Ω' ein weiterer diskreter, nichtleerer Ergebnisraum sowie $X : \Omega \to \Omega'$ eine beliebige Abbildung. Man definiert das Bildmaß P_X von P unter X gemäß

$$\mathrm{P}_X(A) = \mathrm{P}(X^{-1}(A))\,, \quad A \subset \Omega'\,.$$

a) Zeigen Sie, dass (Ω', P_X) ein diskreter W-Raum ist.

b) Sei nun (Ω, P) ein Laplace-Raum. Zeigen Sie, dass in dem Fall auch (Ω', P_X) genau dann ein Laplace-Raum ist, wenn für ein $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\operatorname{card} X^{-1}(\{\omega'\}) = N \quad \text{für alle} \quad \omega' \in \Omega'\,.$$

Aufgabe 10) **(2+2 Punkte)**

Sie ziehen Kugeln aus einer Urne, wobei jede Kugel mit gleicher Wahrscheinlichkeit gezogen wird.

a) Zeigen Sie, unter Verwenden von Aufgabe 9, dass das Ziehen 'ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge' ein Laplace-Experiment beschreibt.

b) Begründen Sie, warum man kein Laplace-Experiment erhält, wenn man 'mit Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge' zieht. Verwenden Sie hierfür als Beispiel den Grundraum $\Omega_{IV}^{3,2}$.

Aufgabe 11) **(2+2 Punkte, L)**

Aus einer Gruppe von fünf Männern und fünf Frauen werden fünf Personen rein zufällig ausgewählt.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält die Stichprobe höchstens zwei Frauen?

b) Warum ist dieses Ergebnis aus Symmetriegründen plausibel?

Aufgabe 12) **(2+2 Punkte, L)**

Beweisen Sie die Formel

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

sowohl mengentheoretisch als auch analytisch.

Hinweis

Lehramtsstudenten bearbeiten die beiden mit 'L' gekennzeichneten Aufgaben sowie zwei weitere der vier verbleibenden Aufgaben. Empfohlen werden hierbei die zwei mit * versehenen Aufgaben. Studenten aller anderen Studiengänge bearbeiten die ersten vier Aufgaben.