Philipps-Universität Marburg
Fb Mathematik u. Informatik

Prof. Dr. Hajo Holzmann
Daniel Hohmann

Elementare Stochastik (WS 2011/12)

Übungsblatt 3

Abgabe: Freitag, 11.11.11, 12:11 Uhr

Aufgabe 13) **(2+2 Punkte, *)**

Drei Spieler ziehen rein zufällig Kugeln aus einer Urne. Die Urne ist mit acht schwarzen und vier weißen Kugeln gefüllt. Die Spieler ziehen der Reihe nach jeweils ohne Zurücklegen solange eine Kugel aus der Urne, bis die erste weiße Kugel gezogen wird. Der Spieler, der die erste weiße Kugel zieht, gewinnt.

a) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) zu diesem Experiment an.

b) Wie groß sind die Gewinnwahrscheinlichkeiten für die drei Spieler?

Aufgabe 14) **(3+1 Punkte, *)**

Aus einer Menge von N Objekten, durchnummeriert mit den Zahlen $1, \dots, N$, ziehen Sie rein zufällig und ohne Zurücklegen $n \leq N$ Objekte.

a) Sei $1 \leq k \leq N$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die größte gezogene Zahl gerade k?

b) Beweisen Sie mit Teil a) das sog. *Gesetz der oberen Summation*,

$$\sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}.$$

Aufgabe 15) [Einfache Irrfahrt] **(3+1 Punkte + 1 Bonuspunkt)**

Seien $\Omega_n = \{-1, 1\}^n$ und P_n die Laplace-Verteilung auf Ω_n. Für $0 \leq k \leq n$ seien die Zufallsvariablen $S_k : \Omega_n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$S_0(\omega) = 0, \quad S_k(\omega) = \sum_{i=1}^{k} \omega_i, \quad k = 1, \dots, n, \; \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega_n.$$

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k den Bildbereich $S_k(\Omega_n)$ sowie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von S_k auf diesem.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich die Irrfahrt $(S_k)_k$ zum Endzeitpunkt n wieder in ihrem Ausgangspunkt?

c) Wie verhält sich diese Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$.

Aufgabe 16) [Verteilung des Maximums] **(3+1 Punkte + 2 Bonuspunkte)**

Seien (Ω_n, P_n) und $(S_k)_{k=1,\dots,n}$ wie in Aufgabe 15. Weiter sei $M_n = \max\{S_0, \dots, S_n\}$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des *Spiegelungsprinzips*, dass für $i, j \in \{-n, \dots, n\}$ mit $j \geq 0$, $i \leq j$ gilt

$$\mathrm{P}_n(M_n \geq j, S_n = i) = \mathrm{P}_n(S_n = 2j - i)\,.$$

Spiegeln Sie hierfür die Pfade $\omega \in \{M_n \geq j, S_n = i\}$ ab dem Zeitpunkt $\tau_j(\omega) = \min\{1 \leq k \leq n : S_k(\omega) = j\}$.

b) Zeigen Sie mit Teil a), dass gilt

$$\mathrm{P}_n(M_n = j, S_n = i) = \mathrm{P}_n(S_n = 2j - i) - \mathrm{P}_n(S_n = 2(j+1) - i)\,.$$

c) Folgern sie schließlich

$$\mathrm{P}_n(M_n = j) = \mathrm{P}_n(S_n \in \{j, j+1\})\,, \quad 0 \leq j \leq n\,.$$

Aufgabe 17) **(2+2 Punkte, L)**

a) Unter 20 Schülern einer Klasse werden 5 für die Teilnahme an einem USA-Austausch ausgelost. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Anna und ihre beste Freundin beide dabei sind?

b) An einem Kindergeburtstag nehmen 8 Mädchen und 5 Jungen teil. Für die Schnitzeljagd wird eine Gruppe aus 4 Kindern per Los bestimmt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht die Gruppe

i) nur aus Mädchen,

ii) nur aus Jungen, oder

iii) aus 2 Jungen und 2 Mädchen?

Aufgabe 18) **(2+2 Punkte, L)**

Ein Glücksspiel zwischen zwei Spielern A und B verlaufe folgendermaßen: Zunächst werden aus einer Urne mit r roten und w weißen Kugeln rein zufällig zwei Kugeln hintereinander mit Zurücklegen gezogen, dann wird eine faire Münze geworfen. Bezeichnet k die Anzahl an gezogenen roten Kugeln, so bekommt Spieler A bei Ausgang 'Kopf' k Euro von Spieler B. Entsprechend bekommt Spieler B bei Ausgang 'Zahl' k Euro von Spieler A.

a) Modellieren Sie dieses Gewinnspiel durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum und beschreiben Sie den Gewinn bzw. Verlust von Spieler A durch eine Zufallsvariable X auf diesem.

b) Bestimmen Sie die Verteilung von X. Handelt es sich um ein faires Gewinnspiel?