Philipps-Universität Marburg Prof. Dr. Hajo Holzmann
Fb Mathematik u. Informatik Daniel Hohmann

Elementare Stochastik (WS 2011/12)

Übungsblatt 4

Abgabe: Freitag, 18.11.11

Aufgabe 19) **(1.5+1.5+1 Punkte, *)**

Sie werfen einen fairen Würfel zweimal.

a) Modellieren Sie dieses Experiment durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P).

b) Die Zufallsvariable X beschreibe das Ergebnis des ersten Wurfes. Bestimmen Sie die Verteilung von X.

c) Sei $E \subset \Omega$ das Ereignis „Die Augensumme beider Würfe ist 9“. Bestimmen Sie die Verteilung $\mathrm{P}_{X|E}$, die bedingte Verteilung von X gegeben das Ereignis E.

Aufgabe 20) **(2+1+1 Punkte, *)**

In einer Urne befinden sich r rote und s schwarze Kugeln. Sie entnehmen rein zufällig eine Kugel und geben anschließend diese sowie $l \in \mathbb{N}$ weitere Kugeln dieser Farbe in die Urne. Dieser Vorgang wird noch $n-1$ mal wiederholt.

a) Modellieren Sie dieses *mehrstufige* Zufallsexperiment durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n, \mathrm{P})$.

b) Zeigen Sie, dass für jeden Ausgang $\omega \in \Omega$ die Wahrscheinlichkeit $\mathrm{P}(\{\omega\})$ nur von der Anzahl der gezogenen roten Kugeln abhängt, nicht jedoch von deren Ziehungszeitpunkten.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde in obigem Experiment genau k mal eine rote Kugel gezogen? Was ergibt sich für $n = 10$, $r = 2$, $s = 3$, $l = 1$ und $k = 4$?

Aufgabe 21) **(1.5+1+1.5 Punkte)**

Wir betrachten den Ergebnisraum $\Omega = \Omega_I^{n,N}$ mit Laplace-Verteilung P sowie für ein natürliches $R \leq N$ die Ereignisse

$$A_j = \{\omega \in \Omega : \omega_j \leq R\}, \quad 1 \leq j \leq n,$$
$$A_J = \bigcap_{j \in J} A_j \cap \bigcap_{j \notin J} A_j^{\complement}, \quad J \subset \{1, \ldots, n\}.$$

a) Berechnen Sie die Kardinalitäten der A_J.

b) Beschreiben Sie für $k \leq n$ die Ereignisse $E_k =$ „für genau k ω_j gilt $\omega_j \leq R$“ mit Hilfe der A_J.

c) Bestimmen Sie damit die Verteilung der Zufallsvariable $X = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{A_j}$.

Aufgabe 22) **(4 Punkte)**

Für $j \in \mathbb{N}$ seien die Zufallsvariablen X_j hypergeometrisch verteilt mit Parametern n, R_j und N_j. Hierbei gelte $N_j \to \infty$ sowie $R_j/N_j \to p \in (0,1)$ für $j \to \infty$. Zeigen Sie, dass für $0 \leq r \leq n$ gilt

$$\lim_{j\to\infty} \mathrm{P}(X_j = r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}.$$

Aufgabe 23) [Ziegenproblem] **(4+2+2 Punkte, L)**

Bei einer Game-Show befindet sich hinter einer von drei Türen ein Auto. Der Kandidat wählt eine Tür, woraufhin der Showmaster eine der beiden übrigen bzw. die übrige Tür öffnet, hinter der kein Auto steht. Der Kandidat hat nun die Option, von seiner ursprünglichen Wahl abzurücken und sich für die andere noch geschlossene Tür zu entscheiden. Sollte er dies tun? (Wir setzen voraus, dass er das Auto haben möchte.) Formalisieren Sie das Problem wie folgt:

a) Beschreiben Sie die Situation als dreistufiges Experiment mit $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$ mit geeignetem Ω_j, $j = 1,2,3$. Dabei bezeichne für $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega$ ω_1 die Nummer der Autotür, ω_2 die Nummer der von dem Kandidaten gewählten Tür und ω_3 die Nummer der vom Moderator geöffneten Tür. Beachten Sie hierbei, dass der Moderator keine Wahl hat, wenn ω_1 und ω_2 verschieden sind. Befindet sich das Auto hinter der vom Kandidaten gewählten Tür (d.h. $\omega_1 = \omega_2$), so nehmen wir an, dass der Moderator zufällig eine der Ziegentüren wählt. Welche Teilmengen von Ω entsprechen den Ereignissen

- G_j :=„Das Auto befindet sich hinter Tor j“,
- W_k :=„Der Kandidat wählt Tor k“,
- M_l :=„Der Moderator öffnet Tor l“.

Berechnen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$\mathrm{P}(G_j | W_k \cap M_l), \quad 1 \leq j,k,l \leq 3$$

und begründen Sie damit, ob der Spieler wechseln sollte oder nicht.

b) Erstellen Sie ein Baumdiagramm für dieses Experiment.

c) Nehmen Sie nun an, der Kandidat hätte die Wahl zwischen n Türen, wobei sich wieder nur hinter einer der Türen ein Auto befindet. Nach der Wahl des Kandidaten öffnet der Showmaster eine derjenigen verbleibenen Türen, hinter denen sich das Auto nicht befindet. Sollte auch hier der Kandidat wechseln und sich rein zufällig für eine der beiden verbleibenden Türen entscheiden? Was geschieht für $n \to \infty$?