

Elementare Stochastik (WS 2011/12)

Übungsblatt 6

Abgabe: Freitag, 2.12.11

Aufgabe 30)

(1+3 Punkte)

Sei $X \sim Hyp(n, R, N)$. Bestimmen Sie den *Erwartungswert* und die *Varianz* von X .

Hinweis: Betrachten Sie hierfür die in Bsp. 11 der VL konstruierte Zufallsvariable.

Aufgabe 31)

(2+2 Punkte, *)

Seien (Ω, P) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0$.

a) Zeigen Sie, dass gilt

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k).$$

b) Es gelte $X \sim Geom(p)$ für $p \in (0, 1)$. Berechnen Sie mit Hilfe von a) erneut den Erwartungswert von X .

Aufgabe 32)

(4 Punkte, *)

Seien X und Y Zufallsvariable auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) mit $X \leq Y$ und $E|X|, E|Y| < \infty$. Sei weiter $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\}$. Zeigen Sie, dass dann folgende Aussagen äquivalent sind:

i) $EX = EY$

ii) $P(A) = 1$

Gilt ii), so sagt man auch, dass X und Y *fast sicher* gleich sind.

Aufgabe 33)

(2+2 Punkte)

Zeigen Sie, dass für jede Zufallsvariable X mit Werten in \mathbb{N}_0 und $P(X = 0) < 1$ gilt

a) $P(X = 0) \leq \text{Var}X / (EX)^2$,

b) $2 - EX^2 / (EX)^2 \leq P(X \neq 0) \leq EX$.

Hinweis: Verwenden Sie die *Tschebyschew-Ungleichung*.

Aufgabe 34)**(2+2 Punkte, L)**

Ein fairer Würfel wird n mal geworfen. Dabei beschreibe S_n die Anzahl an geworfenen Sechsen, sodass S_n/n deren *relative Häufigkeit* ergibt.

a) Zeigen Sie, dass für $\varepsilon > 0$ gilt

$$P(|S_n/n - 1/6| \geq \varepsilon) \leq \frac{5}{36n\varepsilon^2}.$$

b) Beantworten Sie damit folgende Frage: Wie oft muss man einen fairen Würfel werfen, damit die relative Häufigkeit der geworfenen Sechsen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % zwischen $1/9$ und $2/9$ liegt?

Aufgabe 35)**(2+1+1 Punkte, L)**

Drei Reisende besteigen unabhängig voneinander einen leeren Zug mit drei nummerierten Wagen, wobei sich jeder Reisende rein zufällig für einen der Wagen entscheidet. Die Zufallsvariable X_j beschreibe die Anzahl der Reisenden in Wagen j . Modellieren Sie diese Situation durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum und bestimmen Sie

a) die gemeinsame Verteilung von X_1 , X_2 und X_3 ,

b) die Verteilung von X_1 ,

c) die Verteilung der Anzahl der leeren Wagen.