Philipps-Universität Marburg Prof. Dr. Hajo Holzmann
Fb Mathematik u. Informatik Daniel Hohmann

Elementare Stochastik (WS 2011/12)

Übungsblatt 7

Abgabe: Freitag, 9.12.11

Aufgabe 36) [Hypergeometrisches Gesetz der großen Zahlen] (2+2 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $X_n \sim Hyp(n, R_n, N_n)$ mit $N_n \geq n$ und $R_n/N_n =: p_n \to p \in (0,1)$ für $n \to \infty$.

a) Zeigen Sie, dass für beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt

$$\mathrm{P}\big(|X_n/n - p_n| \geq \varepsilon\big) \leq \frac{p_n(1-p_n)}{n\varepsilon^2} \frac{N_n - n}{N_n - 1}.$$

b) Folgern Sie

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\big(|X_n/n - p| \geq \varepsilon\big) = 0.$$

Aufgabe 37) (2+2 Punkte)

Sei (Ω, P) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

a) Zeigen Sie, dass zwei Ereignisse $A, B \subset \Omega$ genau dann unabhängig sind, wenn die Zufallsvariablen 1_A und 1_B unabhängig sind.

b) Folgern Sie, dass zwei Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ genau dann unabhängig sind, wenn für alle beschränkten Funktionen $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\mathrm{E}\big((g(X)h(Y)\big) = \mathrm{E}\big(g(X)\big)\,\mathrm{E}\big(h(Y)\big).$$

Bemerkung: Für eine reellwertige Zufallsvariable X und eine beschränkte Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert $\mathrm{E}(g(X))$ immer.

Aufgabe 38) [Cauchy-Schwarz-Ungleichung] (2+2 Punkte, *)

Seien X, Y Zufallsvariable mit $\mathrm{E}X^2, \mathrm{E}Y^2 < \infty$. Weiter sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ definiert durch

$$f(a) = \mathrm{E}\big((Y - aX)^2\big).$$

a) Bestimmen Sie für den Fall $\mathrm{P}(X = 0) < 1$ das (eindeutige) Minimum von f.

b) Folgern Sie die Gültigkeit der Ungleichung

$$\big(\mathrm{E}(XY)\big)^2 \le \mathrm{E}X^2 \cdot \mathrm{E}Y^2\,, \tag{1}$$

und zeigen Sie, dass in (1) genau dann Gleichheit gilt, wenn ein $\bar{a} \in \mathbb{R}$ existiert mit $\mathrm{P}(Y = \bar{a}X) = 1$, d.h. wenn Y fast sicher linear von X abhängt.

Aufgabe 39) **(4 Punkte, *)**

Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}$ unabhängige Zufallsvariable. Zeigen, dass für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathrm{P}(X \cdot Y = k) = \sum_{\substack{j \in \{1,\dots,k\} \\ j \text{ teilt } k}} \mathrm{P}(X = j) \cdot \mathrm{P}(Y = k/j)\,.$$

Aufgabe 40) **(2+1+1 Punkte, L)**

Aus einer Urne mit 10 roten, 20 blauen, 30 weißen und 40 schwarzen Kugeln werden 25 Kugeln rein zufällig und mit Zurücklegen gezogen. Es bezeichne R, B, W bzw. S die jeweilige Anzahl gezogener Kugeln. Wie sind

i) (R, B, W, S),

ii) $(R + B, W, S)$ und

iii) $R + B + W$

verteilt?

Aufgabe 41) **(3+1 Punkte, L)**

Seien $X_1, \dots, X_n \sim Geo(p)$ unabhängige Zufallsvariable.

a) Zeigen Sie, dass die Summe $X_1 + \ldots + X_n$ negativ binomialverteilt ist und bestimmen Sie die entsprechenden Parameter.

Hinweis: Verwenden Sie die folgende Formel für die *Summe verschobener Binomialkoeffizienten*:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$$

b) Berechnen Sie damit Erwartungswert und Varianz der negativen Binomialverteilung.