Philipps-Universität Marburg Prof. Dr. Hajo Holzmann
Fb Mathematik u. Informatik Daniel Hohmann

Elementare Stochastik (WS 2011/12)

Übungsblatt 8

Abgabe: Freitag, 16.12.11

Aufgabe 42) [Nichtsymmetrische Irrfahrt] **(2+4 Punkte)**

Für $T \in \mathbb{N}$ seien $\Omega = \{-1,1\}^T$, P die Laplace-Verteilung auf Ω sowie für ein $p^* \in (0,1)$ die Verteilung P^* gegeben durch

$$\mathrm{P}^*(\{\omega\}) = \big(p^*\big)^{\sum_{j=1}^T \mathbf{1}_{\{\omega_j=1\}}} \big(1-p^*\big)^{\sum_{j=1}^T \mathbf{1}_{\{\omega_j=-1\}}}. \tag{1}$$

Weiter seien $Z_1,\ldots,Z_T : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch $Z_t = \sum_{j=1}^t \omega_j$ und sei $M_T = \max\{Z_1,\ldots,Z_T\}$.

a) Zeigen sie, dass für $\omega \in \Omega$ gilt

$$\mathrm{P}^*(\{\omega\}) = 2^T \big(p^*\big)^{\frac{T+Z_T(\omega)}{2}} \big(1-p^*\big)^{\frac{T-Z_T(\omega)}{2}} \mathrm{P}(\{\omega\}).$$

b) Folgern Sie, unter Verwendung von Aufgabe 16, dass für $j \geq 0$ und $i \leq j$ gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{P}^*\big(M_T \geq j, Z_T = i\big) &= 2^T \big(p^*\big)^{\frac{T+i}{2}} \big(1-p^*\big)^{\frac{T-i}{2}} \mathrm{P}\big(Z_T = 2j-i\big)\\ &= \Big(\frac{1-p^*}{p^*}\Big)^{j-i} \mathrm{P}^*\big(Z_T = 2j-i\big),\end{aligned}$$

bzw. wegen der Symmetrie $\mathrm{P}(Z_T = i) = \mathrm{P}(Z_T = -i)$ auch

$$\mathrm{P}^*\big(M_T \geq j, Z_T = i\big) = \Big(\frac{p^*}{1-p^*}\Big)^{j} \mathrm{P}^*\big(Z_T = i-2j\big).$$

Aufgabe 43) [Barrier Option] **(2+2+2 Punkte)**

Es sei $(S_t)_{t=0,\ldots,T}$ der Werteprozess einer Aktie bei zugrundeliegendem *Binomialmodell*, d.h. es existieren $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und unabhängige Zufallsvariable $X_1,\ldots,X_T$ mit Werten in $\{-1,1\}$, so dass

$$S_t = \begin{cases} b \cdot S_{t-1}, & X_t = 1, \\ a \cdot S_{t-1}, & X_t = -1, \end{cases} \qquad t = 1,\ldots,T.$$

Es bezeichne $Z_t = X_1 + \ldots + X_t$, $t = 1,\ldots,T$. Wir betrachten eine *up-and-in Call Option* mit *strike price* K, ein Beispiel einer *Barrier Option*, die dann in Kraft tritt, wenn der Wert S_t zu irgendeinem Zeitpunkt $t = 1,\ldots,T$ eine vorgegebene Schranke $B > \max\{S_0, K\}$ überschreitet. Der Wert dieser Call Option ist also

$$C^{\text{call}}_{\text{u\&i}} = \begin{cases} (S_T - K)_+, & \max\{S_1,\ldots,S_T\} \geq B, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

und der faire Preis, ähnlich wie bei einer gewöhnlichen Call Option, ist gegeben durch

$$(1+r)^{-T}\,\mathrm{E}^*\big(C^{\text{call}}_{\text{u\&i}}\big)\,,$$

wobei r die Rendite der risikolosen Anlage ist und E^* den Erwartungswert bzgl. des risikoneutralen Maßes P^*, welches wegen der Unabhängigkeit der Zuwächse von der Form (1) ist, beschreibt.

a) Begründen Sie, dass gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{E}^*\big(C^{\text{call}}_{\text{u\&i}}\big) &= \mathrm{E}^*\big((S_T-K)_+\,\mathbf{1}_{\{\max\{S_1,\dots,S_T\}\geq B\}}\big)\\ &= \mathrm{E}^*\big((S_T-K)_+\,\mathbf{1}_{\{S_T\geq B\}}\big)+\mathrm{E}^*\big((S_T-K)_+\,\mathbf{1}_{\{\max\{S_1,\dots,S_T\}\geq B,S_T<B\}}\big)\,.\end{aligned}$$

b) Nehmen Sie an, dass die Schranke B eine erreichbare Forderung ist, also ein $k_0\leq T$ existiert mit $b^{k_0}S_0=B$, und dass gilt $a=1/b$. Zeigen Sie, dass in dem Fall gilt

$$\mathrm{E}^*\big((S_T-K)_+\,\mathbf{1}_{\{\max\{S_1,\dots,S_T\}\geq B,S_T<B\}}\big)=\sum_{i<k_0}\mathrm{E}^*\big((S_T-K)_+\,\mathbf{1}_{\{\max\{Z_1,\dots,Z_T\}\geq k_0,Z_T=i\}}\big)\,.$$

c) Folgern Sie, unter Verwendung von Aufgabe 42, dass unter den Voraussetzungen von b) gilt

$$\mathrm{E}^*\big(C^{\text{call}}_{\text{u\&i}}\big)=\mathrm{E}^*\big((S_T-K)_+\,\mathbf{1}_{\{S_T\geq B\}}\big)+\left(\frac{p^*}{1-p^*}\right)^{k_0}b^{2k_0}\,\mathrm{E}^*\big((S_T-K/b^{2k_0})_+\,\mathbf{1}_{\{S_T<B/b^{2k_0}\}}\big)\,.$$

Aufgabe 44) **(4 Punkte, *)**

Die Anzahl der in einer Telefonzentrale innerhalb eines Zeitintervalls der Länge τ eingehenden Gespräche sei Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda\tau$ für ein $\lambda>0$. Für zwei disjunkte Zeitintervalle seien diese stochastisch unabhängig. Bezeichne weiter für zwei feste Zeitpunkte $0<t_1<t_2$ die Zufallsvariable X_i die jeweilige Anzahl eingehender Gespräche im Zeitintervall $[0,t_i]$. Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von X_1 gegeben $X_2=n$ für $n\in\mathbb{N}$.

Aufgabe 45) **(4+2 Punkte, L)**

Seien $X\sim Poi(\lambda_1)$ und $Y\sim Poi(\lambda_2)$ unabhängige Zufallsvariable und $Z=X+Y$.

a) Bestimmen Sie die *bedingte Erwartung* $\mathrm{E}(X|Z)$ sowie die *bedingte Varianz* $\mathrm{Var}(X|Z)$ von X gegeben Z.

b) Überprüfen Sie damit beispielhaft die aus der Vorlesung bekannte Formel

$$\mathrm{Var}\,X=\mathrm{E}\big(\mathrm{Var}(X|Z)\big)+\mathrm{Var}\big(\mathrm{E}(X|Z)\big)\,.$$

Aufgabe 46) **(2+4 Punkte, L)**

Seien X und Y Zufallsvariable mit gleicher Verteilung und gelte $\mathrm{E}X^2<\infty$.

a) Berechnen Sie die Kovarianz von $X+Y$ und $X-Y$.

b) Zeigen Sie damit anhand eines Beispiels, dass zwei unkorrelierte Zufallsvariable im Allgemeinen nicht unabhängig sind.