Philipps-Universität Marburg Prof. Dr. Hajo Holzmann
Fb Mathematik u. Informatik Daniel Hohmann

Elementare Stochastik (WS 2011/12)

Übungsblatt 9

Abgabe: Freitag, 23.12.11

Aufgabe 47) **(2+2 Punkte, *)**

a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion f, gegeben durch

$$f(x) = cx^{-\lambda}\mathbf{1}_{(1,\infty)}(x)$$

mit $\lambda > 1$, eine Dichte ist.

b) Bestimmen Sie für dieses f und $X \sim f$ die Wahrscheinlichkeiten $\mathrm{P}(2 \leq X \leq 5)$ und $\mathrm{P}(X \geq 4)$.

Aufgabe 48) **(1+2+1 Punkte)**

Sei P eine Verteilung auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ mit Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$.

a) Zeigen Sie, dass jede monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ höchstens abzählbar viele Sprungstellen besitzt und folgern Sie, dass die Menge U aller Unstetigkeitsstellen von F eine Borelmenge ist.

b) Zeigen Sie, dass im Falle $0 < \mathrm{P}(U) < 1$ durch

$$x \mapsto \mathrm{P}\big((-\infty, x]|U\big) \quad \text{bzw.} \quad x \mapsto \mathrm{P}\big((-\infty, x]|U^{\complement}\big)$$

eine diskrete bzw. eine stetige Verteilungsfunktion definiert wird.

c) Folgern Sie, dass eine diskrete Verteilungsfunktion F_1, eine stetige Verteilungsfunktion F_2 sowie ein $\alpha \in [0,1]$ existieren mit

$$F = \alpha F_1 + (1-\alpha)F_2\,.$$

Aufgabe 49) **(2+2 Punkte, *)**

Die *Cauchy-Verteilung* mit Parametern $s,t \in \mathbb{R}$, $s > 0$, ist gegeben durch die Dichte

$$f_{s,t}(x) = \frac{1}{\pi}\frac{s}{s^2 + (x-t)^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

a) Zeigen Sie, dass die Familie $\{f_{s,t}\}_{s>0, t\in\mathbb{R}}$ eine Lokations-Skalenfamilie ist.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von a) die Verteilungsfunktion einer Cauchy-(s,t)-verteilten Zufallsvariable X.

Aufgabe 50) **(2+2 Punkte)**

Es sei $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \ldots\}$ eine Abzählung der rationalen Zahlen und $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) = 2\sum_{j=1}^{\infty} 3^{-j}\,\mathbf{1}_{[q_j,\infty)}(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

a) Zeigen Sie, dass F eine streng monoton wachsende Verteilungsfunktion ist.

b) An welchen Stellen ist F stetig, an welchen unstetig?

Aufgabe 51) **(2+2 Punkte, L)**

a) Zeigen Sie, dass eine auf ganz $\mathbb{R}$ eindeutig bestimmte Verteilungsfunktion F existiert mit

$$F(x) = x^2$$

für $0 \leq x \leq 1$.

b) Bestimmen Sie die Dichte von F.

Aufgabe 52) **(2+2 Punkte, L)**

a) Sei X normalverteilt mit Parametern μ und σ^2. Zeigen Sie, dass dann $(X-\mu)/\sigma$ standardnormalverteilt ist.

b) Das Abfüllgewicht (in Gramm) einer Zuckerabfüllmaschine sei (μ, σ^2)-normalverteilt mit $\sigma = 0.5$ g. Wie groß muss μ mindestens sein, damit das Mindestgewicht von 999 g mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.95 eingehalten wird?

Tabelle 1: Quantile der Standardnormalverteilung.

p	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
..0		-1.282	-0.842	-0.524	-0.253
..1	-2.326	-1.227	-0.806	-0.496	-0.228
..2	-2.054	-1.175	-0.772	-0.468	-0.202
..3	-1.881	-1.126	-0.739	-0.440	-0.176
..4	-1.751	-1.080	-0.706	-0.412	-0.151
..5	-1.645	-1.036	-0.674	-0.385	-0.126
..6	-1.555	-0.994	-0.643	-0.358	-0.100
..7	-1.476	-0.954	-0.613	-0.332	-0.075
..8	-1.405	-0.915	-0.583	-0.305	-0.050
..9	-1.341	-0.878	-0.553	-0.279	-0.025