Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. Hajo Holzmann
M. Sc. Philipp Naumann

Wintersemester 2012/2013

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie (Stochastik II)

– Blatt 1–

Abgabe: Montag, den 22.10.2012, 12:00 Uhr, HG 00/0070

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Für $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d, \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d)^T, \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_d)^T$ mit $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ heißt $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_d)^T$ eine Ecke von $(\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, falls $c_i = a_i$ oder $c_i = b_i, i = 1, \ldots, d$. Für eine Ecke $\mathbf{c}$ von $(\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ setzen wir

$$\operatorname{sign}(\mathbf{c}) = (-1)^{\#\{j \in \{1,\ldots,d\} :\, c_j = a_j\}}.$$

Für $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ setze

$$\Delta_{(\mathbf{a},\mathbf{b}]}(F) := \sum_{\mathbf{c} \text{ Ecke von } (\mathbf{a},\mathbf{b}]} \operatorname{sign}(\mathbf{c}) F(\mathbf{c}).$$

Zeigen Sie: Ist μ ein W-Maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ und F_μ die zugehörige Verteilungsfunktion, so gilt:

$$\mu((\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = \Delta_{(\mathbf{a},\mathbf{b}]}(F_\mu)$$

Hinweis: Zum Beweis wende man auf die rechte Seite von

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (-\infty, \mathbf{b}] \backslash \{(-\infty, (a_1, b_2, \ldots, b_d)] \cup \cdots \cup (-\infty, (b_1, \ldots, b_{d-1}, a_d)]\}$$

die Einschluss-Ausschluss Formel an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Das Maß P auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ habe die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2e}\frac{1}{x!} & , \quad x \in \mathbb{N}_0 \\ e^{-2x} & , \quad x \in (0, \infty) \backslash \mathbb{N}_0 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

bzgl. dem σ-endlichen Maß

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} (\delta_k + \lambda_{[k,k+1)}).$$

Zeigen Sie, dass P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, d.h. $P(\mathbb{R}) = 1$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $q_1, q_2, \ldots$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$ und die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mathbf{1}_{[q_n, \infty)}(x).$$

Zeigen Sie, dass F eine Verteilungsfunktion ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie: Ist $X \sim N(0,1)$, so gilt für alle $x \geqslant 0$:

$$P(|X| \geqslant x) \leqslant e^{-x^2/2}.$$

Hinweis: Man behandele die Fälle $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2/\pi}$ und $x > \sqrt{2/\pi}$ getrennt. Um die Ungleichung im ersten Fall zu zeigen, vergleiche man die Ableitung der linken und rechten Seite. Im zweiten Fall führt beispielsweise partielle Integration zum Ziel.