Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. Hajo Holzmann
M. Sc. Philipp Naumann

Wintersemester 2012/2013

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie (Stochastik II)

– Blatt 2–

Abgabe: Montag, den 29.10.2012, 12:00 Uhr, HG 00/0070

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $X : \Omega \to [0, \infty)$ eine nicht-negative Zufallsvariable. Zeigen Sie die Äquivalenz aus der Vorlesung

$$\mathbf{E}X < \infty \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geqslant n) < \infty$$

und die Gleichung

$$\mathbf{E}X = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geqslant n)$$

falls X nur Werte in $\mathbb{N}_0$ hat.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $Y : \Omega \to [0, \infty)$ eine nicht-negative Zufallsvariable mit $\mathbf{E}(Y^2) < \infty$. Zeigen Sie die untere Schranke

$$P(Y > 0) \geqslant \frac{(\mathbf{E}Y)^2}{\mathbf{E}(Y^2)}$$

durch Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf $Y \cdot \mathbf{1}_{(Y>0)}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\psi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine monoton steigende, konvexe Funktion mit $\psi(0) = 0$, aber $\psi \not\equiv 0$. Für eine Zufallsvariable X definieren wir die *Orlicz-Norm* durch

$$\|X\|_{\psi} := inf\{C > 0 : \mathbf{E}\psi\left(\frac{|X|}{C}\right) \leqslant 1\}.$$

Zeigen Sie, dass $\|.\|_{\psi}$ eine Semi- Norm ist auf der Menge der Zufallsvariablen mit endlicher Orlicz-Norm.

Hinweis: Für die Äquivalenz $\|X\|_{\psi} = 0 \Leftrightarrow X = 0$ f.s. verwende man die Jensen-Ungleichung.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Die Orlicz-Norm aus Aufgabe 3 kann dazu verwendet werden, Tail-Abschätzungen von Verteilungen zu erhalten.

a) Sei ψ wie in Aufgabe 3 und X eine Zufallsvariable. Zeigen Sie für $0 < \|X\|_\psi < \infty$ mit Hilfe der Markov-Ungleichung

$$P(|X| \geqslant x) \leqslant P(\psi(|X|/\|X\|_\psi) \geqslant \psi(x/\|X\|_\psi)) \leqslant \frac{1}{\psi(x/\|X\|_\psi)}$$

Für $\psi_p(x) = e^{x^p} - 1$ erhalten wir daher eine Abschätzung von der Form $\exp(-Cx^p)$ mit einer positiven Konstante C.

b) Sei nun umgekehrt X eine Zufallsvariable mit $P(|X| \geqslant x) \leqslant Ke^{-Cx^p}$ für jedes x mit positiven Konstanten K, C und $p \geqslant 1$. Man zeige, dass dann gilt:

$$\|X\|_{\psi_p} \leqslant (1 + K/C)^{1/p}.$$

Hinweis: Man berechne den Ausdruck $\mathbf{E}(e^{D|X|^p} - 1)$ mit Hilfe von Satz 1.12 aus der Vorlesung.