Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. Hajo Holzmann
M. Sc. Philipp Naumann

Wintersemester 2012/2013

# Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie (Stochastik II)

– Blatt 3–

Abgabe: Montag, den 5.11.2012, 12:00 Uhr, HG 00/0070

## Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $\mu$ die symmetrische Dreiecksverteilung auf $(-1, 1)$ mit Lebesgue-Dichte

$$f(x) = (1 - |x|)\mathbf{1}_{(-1,1)}(x)$$

a) Bestimmen Sie die Fouriertransformation von $\mu$.

b) Folgern Sie, dass die Fouriertransformation der Pólya-Verteilung mit Lebesgue-Dichte $g(x) = (1 - \cos x)/\pi x^2$ gerade $f$ ergibt.

## Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $P$ und $Q$ zwei W-Maße auf einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A})$ mit Fouriertransformationen $\varphi_P$ und $\varphi_Q$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int e^{-ixy}\varphi_p(y)Q(dy) = \int \varphi_Q(y - x)P(dy).$$

## Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $P$ ein W-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit Fouriertransformation $\varphi_P$. Imitieren Sie den Beweis zur Inversionsformel, um zu zeigen, dass

$$P(\{x\}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{-itx}\varphi_P(t)dt$$

für beliebiges $x \in \mathbb{R}$.

## Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit Verteilung $P_X$. Zeigen Sie:

a) Existiert ein $h > 0$ mit $P(X \in h\mathbb{Z}) = 1$, so ist $\varphi_{P_X}(2\pi/h+t) = \varphi_{P_X}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

b) In diesem Fall gilt für alle $x \in h\mathbb{Z}$

$$P(X = x) = \frac{h}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{-itx}\varphi_{P_X}(t)dt.$$