Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. Hajo Holzmann
M. Sc. Philipp Naumann

Wintersemester 2012/2013

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie (Stochastik II)

– Blatt 4–

Abgabe: Montag, den 12.11.2012, 12:00 Uhr, HG 00/0070

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien X_1, X_2 unabängig und identisch exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$ sowie Y gammaverteilt mit Parametern $\alpha, \beta > 0$, d.h. Y besitzt die Lebesgue-Dichte

$$g(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$$

mit

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty t^{y-1} e^{-t} dt \quad \text{für} \quad y \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die charakteristische Funktion von Y.

b) Bestimmen Sie die Verteilung von $X_1 + X_2$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen und $Z := X + Y$. Zeigen Sie:
Ist die charakteristische Funktion von X auf einer dichten Teilmenge von $\mathbb{R}$ ungleich null, so ist die Verteilung von Y eindeutig durch die Verteilungen von X und Z bestimmt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvektoren. Wir definieren die *empirische charakteristische Funktion* von $X = (X_1, \ldots, X_n)$ durch

$$\hat{\varphi}_n(t) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{i\langle t, X_k \rangle}.$$

Zeigen Sie für $t \in \mathbb{R}^d$:

a) $\mathbf{E}(\hat{\varphi}_n(t)) = \varphi_{X_1}(t)$

b) $\mathbf{E}|\hat{\varphi}_n(t)|^2 = \frac{n-1}{n} |\varphi_{X_1}(t)|^2 + \frac{1}{n}$

c) $\mathbf{E}|\hat{\varphi}_n(t) - \varphi_{X_1}(t)|^2 = \frac{1}{n}(1 - |\varphi_{X_1}(t)|^2)^2$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ schreiben wir die Fouriertransformierte $\hat{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ in der Form

$$\hat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{2\pi i \langle t,x \rangle} dx.$$

a) Zeigen Sie für $f := \mathbf{1}_{(a,b]}$ mit $a, b \in \mathbb{R}, a < b$: $\hat{f}(1) = 0 \Leftrightarrow (b-a) \in \mathbb{N}$

b) Wir verwenden im Folgenden die Notation aus der Vorlesung. Für $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ mit $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d) < \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_d)$ sei der halboffene Quader $Q := (\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ eine endliche disjunkte Vereinigung

$$Q = \bigcup_{i=1}^{n} Q_i$$

von halboffenen Teilquadern $Q_i = (\mathbf{a}^i, \mathbf{b}^i]$. Es gelte:

$$\forall\, i = 1, \ldots, n \quad \exists\, j = j(i) \in \{1, \ldots, d\} \quad \text{mit} \quad (b^i_j - a^i_j) \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie: Dann existiert auch ein $k \in \{1, \ldots, d\}$ mit $(b_k - a_k) \in \mathbb{N}$. Mit anderen Worten: Besitzt jeder Teilquader eine Kante ganzzahliger Länge, dann auch der Quader selbst.