Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. Hajo Holzmann
M. Sc. Philipp Naumann

Wintersemester 2012/2013

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie (Stochastik II)

– Blatt 5–

Abgabe: Montag, den 19.11.2012, 12:00 Uhr, HG 00/0070

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei (X_n) eine Folge von Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Wir definieren

$$X_n \to \infty \quad \text{P-f.s.} \quad :\Longleftrightarrow \quad P\left(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = \infty\}\right) = 1$$

und

$$X_n \to \infty \quad (P) \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall \quad C > 0 : \; P(X_n \leqslant C) \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Zeigen Sie:

$$X_n \to \infty \quad \text{P-f.s.} \quad \Longrightarrow \quad X_n \to \infty \quad (P)$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge messbarer Abbildungen. Zeigen Sie, dass f_n genau dann in P-Wahrscheinlichkeit gegen ein $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ konvergiert, wenn die einzelnen Komponenten $f_n^{(k)}$, $k = 1, \ldots, m$, gegen $f^{(k)}$ in P-Wahrscheinlichkeit konvergieren.
Hinweis: Für $u, v \geqslant 0$ ist $\{u + v > \varepsilon\} \subset \{u > \varepsilon/2\} \cup \{v > \varepsilon/2\} \subset \{u + v > \varepsilon/2\}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $T : (0, 1] \to \{0, 1\}^\infty$ definiert durch $x = \sum_{n=1}^\infty \frac{d_n(x)}{2^n} \mapsto (d_n(x))_{n\geqslant 1}$, wobei wir die Notation für die Binärdarstellung aus der Vorlesung verwenden.

a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\pi^{(n)} : \{0, 1\}^\infty \to \{0, 1\}^n, \quad (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto (a_1, \ldots, a_n)$$

die Projektion auf die ersten n Komponenten. Wir erklären auf $\{0, 1\}^\infty$ die σ-Algebra

$$\mathcal{A} := \sigma\left(\pi^{(n)} : n \in \mathbb{N}\right),$$

also die kleinste σ-Algebra auf $\{0, 1\}^\infty$, so dass alle Projektionen auf endlich viele Komponenten messbar sind. Zeigen Sie, dass die Abbildung T $\mathcal{B}_{(0,1]} - \mathcal{A}$ messbar ist.

b) Das von T in $\{0, 1\}^\infty$ auf $\mathcal{A}$ induzierte Maß μ erfüllt die Bedingung

$$\mu \circ {\pi^{(n)}}^{-1} = \otimes_{i=1}^n Ber_{1/2},$$

d.h. auf den endlichen Produkträumen bekommen wir ein Produkt von Bernoulli-Verteilungen mit Parameter 1/2.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Wir erinnern an die Quantilfunktion einer Verteilungsfunktion F definiert durch

$$F^{-1}(u) := \inf\{x : u \leqslant F(x)\}$$

mit der Eigenschaft

$$F^{-1}(u) \leqslant x \quad \Longleftrightarrow \quad u \leqslant F(x).$$

Ferner verwenden wir für den linksseitigen Limes der Verteilungsfunktion an der Stelle x die Notation

$$F(x-) := \lim_{y \uparrow x} F(y).$$

a) Sei X eine Zufallsvariable mit stetiger, streng monoton wachsender Verteilungsfunktion F. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable F(X) gleichverteilt ist auf dem Einheitsintervall, d.h. es gilt: $P(F(X) \leqslant u) = u \;\forall\; 0 \leqslant u \leqslant 1$. Den Übergang von X zu F(X) nennt man *Wahrscheinlichkeits-Transformation*.

b) Zeigen Sie, dass für die Quantilfunktion F^{-1} gilt: $F(F^{-1}(u)-) \leqslant u \leqslant F(F^{-1}(u))$ und im Falle einer stetigen (nicht notwendig streng monoton steigenden) Verteilungsfunktion F gilt: $F(F^{-1}(u)) = u \quad \forall \quad 0 < u < 1$.

c) Zeigen Sie: $P(F(X) < u) = F(F^{-1}(u)-)$ und dass daher das Resultat in a) bereits für ein stetiges F gilt.