Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. Hajo Holzmann
M. Sc. Philipp Naumann

Wintersemester 2012/2013

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie (Stochastik II)

– Blatt 6–

Abgabe: Montag, den 26.11.2012, 12:00 Uhr, HG 00/0070

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \ldots$ u.i.v. mit $P(X_i > x) = e/x \log x$ für $x \geqslant e$. Zeigen Sie:

a) $E|X_i| = \infty$

b) Es existiert eine Folge μ_n mit $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \infty$, so dass gilt:

$$\frac{S_n}{n} - \mu_n \to 0 \quad (P)$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \ldots$ u.i.v. mit $P(X_i > x) = e^{-x}$.

a) Zeigen Sie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{X_n}{\log n} \geqslant \beta\right) < \infty \quad \text{für} \quad \beta > 1$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{X_n}{\log n} \geqslant \beta\right) = \infty \quad \text{für} \quad \beta < 1$$

b) Folgern Sie aus a) mit Hilfe der Lemmata von Borel-Cantelli, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} = 1 \quad \text{P-f.s.}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Zeigen Sie:

$$d(X,Y) := E\left(\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\right)$$

definiert eine Metrik auf der Menge der Zufallsvariablen, d.h. es gilt:

(i) $d(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$ f.s.

(ii) $d(X,Y) = d(Y,X)$

(iii) $d(X,Z) \leqslant d(X,Y) + d(Y,Z)$

b) Man beweise: Für eine Folge X_n gilt $d(X_n, X) \to 0$ genau dann, falls $X_n \to X \quad (P)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Raum der Zufallsvariablen zusammen mit der in Aufgabe 3 definierten Metrik d vollständig ist, d.h. es gilt:
Ist (X_n) eine Folge von Zufallsvariablen mit $d(X_m, X_n) \to 0$ für $m, n \to \infty$, so existiert eine Zufallsvariable X mit $d(X_n, X) \to 0$ für $n \to \infty$.