Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. Hajo Holzmann
M. Sc. Philipp Naumann

Wintersemester 2012/2013

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie (Stochastik II)

– Blatt 7–

Abgabe: Montag, den 3.12.2012, 12:00 Uhr, HG 00/0070

Aufgabe 1 (4 Punkte + 2 Zusatzpunkte)

Seien $X_1, X_2, \ldots$ u.i.v. Zufallsvariablen. Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und $h : \mathbb{R} \times K \to \mathbb{R}$ derart, dass

(i) $\forall\, x \in \mathbb{R}$ ist $h(x, \cdot) : K \to \mathbb{R}$ stetig.

(ii) $\forall\, \vartheta \in K$ ist $h(\cdot, \vartheta) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar.

(iii) $\exists H : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ messbar mit $EH(X_1) < \infty$ und

$$|h(x, \vartheta)| \leqslant H(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \vartheta \in K.$$

Zeigen Sie:

a) $\mu(\vartheta) := Eh(X_1, \vartheta)$ existiert für alle $\vartheta \in K$ und $\mu : K \to \mathbb{R}$ ist stetig.

b) $P\Big(\limsup_{n\to\infty} \sup_{\vartheta\in K} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \big(h(X_i, \vartheta) - \mu(\vartheta)\big) \leqslant 0\Big) = 1$. Dazu betrachte man $g(x, \vartheta, \rho) = \sup_{\|\vartheta'-\vartheta\|\leqslant\rho}(h(x, \vartheta') - \mu(\vartheta'))$ und die zugehörigen Erwartungswerte. Weiter nutze man ein endliches Überdeckungsargument und das starke Gesetz.

c) Folgere durch Betrachten von $h(x, \vartheta)$ und $-h(x, \vartheta)$ aus Teil b)

$$P\Big(\lim_{n\to\infty} \sup_{\vartheta\in K} \Big|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \big(h(X_i, \vartheta) - \mu(\vartheta)\big)\Big| = 0\Big) = 1.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wir betrachten den W-Raum $((0, 1], \mathcal{B}_{(0,1]}, \lambda_{(0,1]})$ und für jedes $\omega \in (0, 1]$ dessen eindeutige Binärdarstellung

$$\omega = \sum_{n=1}^\infty \mathbf{1}_{A_n}(\omega)/2^n,$$

wobei

$$A_n = (1/2^n, 2/2^n] \cup (3/2^n, 4/2^n] \cup \cdots \cup ((2^n - 1)/2^n, 1].$$

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $S_n^0(\omega)$ die Anzahl aller Nullen sowie $S_n^1(\omega)$ die Anzahl aller Einsen in der Binärdarstellung von ω bis zur n-ten Nachkommastelle. Wir nennen eine Zahl ω *normal*, falls für $k = 0, 1$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^k(\omega)}{n} = \frac{1}{2}.$$

Zeigen Sie, dass $\lambda_{(0,1]}$-fast alle Zahlen in $(0, 1]$ normal sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum und $X, X_1, X_2, \dots : \Omega \to \mathbb{Z}$ ganzzahlige Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass die Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann schwach gegen X konvergiert, wenn für alle $z \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} P(X_n = z) = P(X = z).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Für die Verteilungsfunktionen F und G auf $\mathbb{R}$ definiert man die *Lévy-Metrik* ρ durch

$$\rho(F, G) := \inf\{\varepsilon > 0 \mid F(x - \varepsilon) - \varepsilon \leqslant G(x) \leqslant F(x + \varepsilon) + \varepsilon \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\}.$$

Zeigen Sie:

a) Durch ρ wird tatsächlich eine Metrik definiert.

b) Sind $F, F_1, F_2, \dots$ Verteilungsfunktionen, so konvergiert $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bzgl. ρ genau dann gegen F, wenn $F_n \Rightarrow F$.