Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. Hajo Holzmann
M. Sc. Philipp Naumann

Wintersemester 2012/2013

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie (Stochastik II)

– Blatt 8–

Abgabe: Montag, den 10.12.2012, 12:00 Uhr, HG 00/0070

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Man beweise: Es existiert eine abzählbare Menge M von Lipschitz-stetigen Funktionen f mit $0 \leqslant f \leqslant 1$, so dass gilt:
Für eine Folge von Zufallsvariablen (X_n) und eine weitere Zufallsvariable X gilt $X_n \Rightarrow X$ genau dann, falls $Ef(X_n) \to Ef(X)$ gilt für alle $f \in M$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \dots$ u.i.v. Zufallsvariablen mit $S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Die zu X_1 gehörige charakteristische Funktion φ sei differenzeirbar in 0 mit $\varphi'(0) = i\mu$ für ein $\mu \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\frac{S_n}{n} \to \mu \quad (P) \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Hinweis: Sind $c, c_1, c_2, \dots \in \mathbb{C}$ mit $\lim_{n\to\infty} c_n = c$, so gilt $\lim_{n\to\infty} (1 + c_n/n)^n = e^c$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \dots$ u.i.v. Zufallsvariablen mit $EX_i = 0$ und $EX_i^2 = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Zeigen Sie:

$$\sum_{m=1}^{n} X_m \Big/ \left(\sum_{m=1}^{n} X_m^2 \right)^{1/2} \implies \chi$$

mit $\chi \sim N(0, 1)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Für eine Folge (X_n) von Zufallsvariablen erklären wir

$$X_n := o_P(1) \quad :\Longleftrightarrow \quad X_n \to 0 \quad (P)$$

und

$$X_n := O_P(1) \quad :\Longleftrightarrow \quad (P_{X_n}) \quad \text{ist straff}$$

Beweisen Sie die Rechenregeln

a) $o_P(1) + o_P(1) = o_P(1)$

b) $o_P(1) + O_P(1) = O_P(1)$

c) $O_P(1) o_P(1) = o_P(1)$