Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie (Stochastik II)

– Blatt 9 –

Abgabe: Montag, den 17.12.2012, 12:00 Uhr, HG 00/0070

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \dots$ u.i.v. Zufallsvariablen mit $X_1 \geq 0$, $E(X_1) = 1$ und $\text{Var}(X_1) = \sigma^2 \in (0, \infty)$ sowie $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Zeigen Sie unter Verwendung der Delta-Methode, dass

$$\frac{2(\sqrt{S_n} - \sqrt{n})}{\sigma} \implies Z,$$

wobei $Z \sim N(0, 1)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien Z_n, Z Zufallsvariablen und $a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \rightarrow \infty$ so dass

$$a_n Z_n \implies Z,$$

und $P(Z_n \in I) = 1$ für ein Intervall $0 \in I \subset \mathbb{R}$. Sei weiter $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine in 0 zweimal differenzierbare Funktion mit $f'(0) = 0$ und $f''(0) \neq 0$. Zeigen Sie:

$$a_n^2 (f(Z_n) - f(0)) \implies \frac{1}{2} f''(0) Z^2$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \dots$ u.i.v. Zufallselemente mit Werten in

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \subset \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) $X_n \implies X$, d.h. $\forall f \in C(S^1)$ gilt

$$Ef(X_n) \rightarrow Ef(X) \quad , n \rightarrow \infty$$

b) $\forall m \in \mathbb{Z}$ gilt

$$EX_n^m \rightarrow EX^m \quad , n \rightarrow \infty$$

Hinweis: Verwenden Sie den Weierstraßschen Approximationssatz für stetige, periodische Funktionen durch trigonometrische Polynome.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \dots$ u.i.v. Zufallsvariablen mit $EX_1 = 0$ und $EX_1^2 = 1$. Für die charakteristische Funktion φ_{X_1} gelte

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_{X_1}(t)| dt < \infty, \quad |\varphi_{X_1}(t)| < 1 \quad \text{für } t \neq 0 \quad \text{und} \quad |\varphi_{X_1}(t)| \rightarrow 0 \quad \text{für } |t| \rightarrow \infty.$$

Wir setzen $S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Zeigen Sie:

a) $S_n/\sqrt{n}$ hat die Dichte

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} (\varphi_{X_1}(t/\sqrt{n}))^n dt$$

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f_n(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Hinweis: Für Teil b) schreibe man die Dichte der Normalverteilung $1/\sqrt{2\pi} e^{-x^2/2}$ mit Hilfe der Inversionsformel in ein Integral um und berechne davon den Betrag der Differenz zu f_n . Dazu teile man den Integrationsbereich auf in $|t| \geq \varepsilon\sqrt{n}$ und $|t| < \varepsilon\sqrt{n}$ für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ und verwende eine Taylorentwicklung für φ_{X_1} bis zur zweiten Ordnung.