

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie (Stochastik II)

– Blatt 10 –

Abgabe: Montag, den 14.01.2013, 12:00 Uhr, HG 00/0070

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $(N_t)_{t \geq 0}$ und $(N'_t)_{t \geq 0}$ zwei Poisson Prozesse mit Intensitäten $\lambda, \lambda' > 0$. Die Prozesse seien unabhängig, d.h. $\sigma(N_t : t \geq 0)$ und $\sigma(N'_t : t \geq 0)$ sind unabhängig. Zeigen Sie: Die Familie $(N_t + N'_t)_{t \geq 0}$ ist wieder ein Poisson Prozess mit Intensität $\lambda + \lambda'$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $(N_t)_{t \geq 0}$ ein Poisson Prozess auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sowie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t) = \begin{cases} t, & t \in \mathbb{Q} \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Weiter seien $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit stetiger Verteilung und

$$M_t(\omega) = N_t(\omega) + f(t + X(\omega)), \quad \omega \in \Omega, t \geq 0.$$

Zeigen Sie:

- Die Familie $(M_t)_{t \geq 0}$ ist kein Poisson Prozess, denn sie erfüllt keine der drei geforderten Pfadeigenschaften.
- Die Prozesse $(M_t)_{t \geq 0}$ und $(N_t)_{t \geq 0}$ besitzen die gleichen endlich-dimensionalen Verteilungen, da für beliebiges $t \geq 0$ gilt: $P(M_t = N_t) = 1$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $(N_t)_{t \geq 0}$ ein Poisson Prozess mit Intensität λ . Zeigen Sie:

Für jedes $s \geq 0$ ist $(N_{s+t} - N_s)_{t \geq 0}$ wieder ein Poisson Prozess mit Intensität λ und unabhängig von $\sigma(N_r; r \leq s)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte + 2 Zusatzpunkte)

Sei X eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda > 0$, also

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Es seien $Y_1, Y_2, \dots$ u.i.v. und von X unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilung

$$P(Y_i = 0) = 1 - p, \quad P(Y_i = 1) = p \quad \text{für ein } p \in (0, 1).$$

Betrachte die Zufallsvariable Z mit

$$Z = \begin{cases} Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n, & \text{falls } X = n \\ 0, & \text{falls } X = 0. \end{cases}$$

- a) Geben Sie die bedingte Verteilung von Z gegeben $X = n$ an.
- b) Zeigen Sie mit Hilfe der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit, dass $Z \sim \text{Poi}(p\lambda)$.
- c) Seien $(W_n)_{n \geq 1}$ unabhängige, $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilte Zufallsvariablen und

$$T_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n.$$

Nach Vorlesung ist durch die Konstruktion

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}}$$

die Familie $(N_t)_{t \geq 0}$ ein Poisson Prozess. Zeigen Sie unter Verwendung von b), dass der ausgedünnte Prozess $(\tilde{N}_t)_{t \geq 0}$ definiert durch

$$\tilde{N}_t = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}}$$

ein Poisson Prozess zum Parameter $p\lambda$ ist.