

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie (Stochastik II)

– Blatt 11 –

Abgabe: Montag, den 21.01.2013, 12:00 Uhr, HG 00/0070

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei X eine integrierbare Zufallsvariable auf dem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $B_1, \dots, B_n$ eine disjunkte Zerlegung von Ω .

a) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B} := \sigma(B_1, \dots, B_n) = \left\{ \bigcup_{i \in I} B_i \mid I \subset \{1, \dots, n\} \right\}$$

b) Bestimmen Sie $E(X|\mathcal{B})$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie folgende Aussage für eine Teil- σ -Algebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Hat eine Zufallsvariable $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dieselbe Verteilung wie die bedingte Erwartung $E(X|\mathcal{G})$, so folgt $X = E(X|\mathcal{G})$ fast sicher.

Hinweis: Beachten Sie, dass $E(X|\mathcal{G})$ und $X - E(X|\mathcal{G})$ im Hilbertraum $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ orthogonal zueinander sind und verwenden Sie den Satz des Pythagoras.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien T_0 und T_1 unabhängige κ -exponentialverteilte Zufallsvariablen ($\kappa > 0$), sowie $X := \min(T_0, T_1)$. Man zeige, dass

$$E(X|T_0) = \kappa^{-1}(1 - e^{-\kappa T_0})$$

gilt.

Hinweis: Verwenden Sie das Beispiel 4 zur bedingten Erwartung aus der Vorlesung.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Wir betrachten den W-Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), N(0, 1))$ sowie die darauf definierten Zufallsvariablen X, Y gemäß $X(\omega) = \omega$ und $Y(\omega) = (\cos(\omega), \sin(\omega))$. Zeigen Sie:

a) Jede $\sigma(Y)$ -messbare Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt die Periode 2π , d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{Z}$ ist $f(x + 2\pi z) = f(x)$.

b) Bezeichnet φ die Dichte der Standardnormalverteilung, so gilt

$$E(X|Y)(x) = \frac{\sum_{z \in \mathbb{Z}} (x + 2\pi z) \varphi(x + 2\pi z)}{\sum_{z \in \mathbb{Z}} \varphi(x + 2\pi z)}.$$