

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie (Stochastik II)

– Blatt 12 –

Abgabe: Montag, den 28.01.2013, 12:00 Uhr, HG 00/0070

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen und $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die vom Prozess X erzeugte Filtration, d.h. $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n)$, und es sei $M_n := \prod_{i=1}^n X_i$ ($n \in \mathbb{N}$). Welche Eigenschaften muss die Folge (X_n) erfüllen, damit (M_n) ein $(\mathcal{F}_n)$ -Martingal ist? *Hinweis:* Berücksichtigen Sie auch, dass der Erwartungswert wohldefiniert sein muss, d.h. dass M_n integrierbar sein muss.

Aufgabe 2 (4 Punkte + 2 Zusatzpunkte)

Seien $\xi_1, \xi_2, \dots$ unabhängig mit $P(\xi_i = 1) = p$ und $P(\xi_i = -1) = 1 - p = q$ für ein $p \in (0, 1)$, $p \neq 1/2$ und $X_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Für $a, b \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Stoppzeit $T_{\{a, -b\}}$, also

$$T_{\{a, -b\}} = \inf\{n \geq 1 : X_n = a \text{ oder } X_n = -b\}.$$

Man überzeuge sich davon (ohne es aufzuschreiben), dass wie bei der symmetrischen Irrfahrt wiederum

$$P(T_{\{a, -b\}} < \infty) = 1$$

gilt.

- a) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 1, dass $M_n := (q/p)^{X_n}$ ein Martingal ist.
- b) Folgern Sie mit Hilfe von Optional Stopping und majorisierter Konvergenz, dass gilt

$$P(X_{T_{\{a, -b\}}} = a) = \frac{(q/p)^b - 1}{(q/p)^{a+b} - 1}.$$

- c) Wir betrachten die Stoppzeit

$$T_a = \inf\{n \geq 1 : X_n = a\}.$$

Schließen Sie aus b):

$$P(T_a < \infty) = 1 \quad \text{für } q < p$$

und

$$P(T_a < \infty) = (p/q)^a < 1 \quad \text{für } q > p.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}, P)$ ein filtrierter W-Raum und darauf (X_n) und (Y_n) zwei Submartingale sowie N eine Stoppzeit mit $X_N \leq Y_N$. Weiter sei

$$Z_n = \mathbf{1}_{(N \geq n)} X_n + \mathbf{1}_{(N < n)} Y_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{1}_{(N \geq n)}$ prädiktabel ist.
- b) Folgern Sie damit, dass auch (Z_n) ein Submartingal ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zu einem quadratisch integrierbaren $(\mathcal{F}_n)$ -Martingal $\mathbf{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert man dessen *quadratischen Variationsprozess* $\langle \mathbf{X} \rangle$ gemäß

$$\langle X \rangle_n := \sum_{i=2}^n \mathbf{E}((X_i - X_{i-1})^2 | \mathcal{F}_{i-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- a) Begründen Sie anhand der Doob-Zerlegung des Prozesses (X_n^2) , dass $(X_n^2 - \langle X \rangle_n)$ ein Martingal ist.
- b) Zeigen Sie, dass für jede beschränkte Stoppzeit τ gilt

$$\mathbf{E}(\langle X \rangle_\tau) = \mathbf{E}((X_\tau - X_1)^2).$$