Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. Hajo Holzmann
M. Sc. Philipp Naumann

Wintersemester 2012/2013

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie (Stochastik II)

– Blatt 13 –

Abgabe: Montag, den 04.02.2013, 12:00 Uhr, HG 00/0070

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei (X_n) ein prävisibles $(\mathcal{F}_n)$-Martingal und X_1 fast sicher konstant. Man beweise oder widerlege, dass dann (X_n) f.s. konstant ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei (X_n) ein Martingal mit $X_1 = 0$ und $EX_n^2 < \infty$. Zeigen Sie für $\lambda > 0$

$$P\left(\max_{1 \leqslant m \leqslant n} X_m \geqslant \lambda\right) \leqslant EX_n^2/(EX_n^2 + \lambda^2).$$

Hinweis: Nutzen Sie die Tatsache, dass $(X_n + c)^2$ ein Submartingal ist und optimieren Sie über c.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei (X_n) ein Martingal mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} EX_n^2 < \infty$. Zeigen Sie:
Es existiert eine $\mathcal{F}_\infty$-messbare Zufallsvariable X_∞ mit $EX_\infty < \infty$, so dass

$$X_n \to X_\infty \quad \text{f.s. und in } L_2.$$

Schreiben Sie dazu $\xi_1 := X_1$ und $\xi_n := X_n - X_{n-1}$ für $n \geqslant 2$, also $X_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Nutzen Sie nun die Orthogonalität dieser Inkremente und verwenden Sie die Vollständigkeit der L_2-Norm.

Aufgabe 4 (4 Punkte + 2 Zusatzpunkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_n)_n, P)$ ein filtrierter W-Raum und $(X_n)_{n\in-\mathbb{N}_0}$ ein $(\mathcal{F}_n)$-adaptiertes Rückwärtsmartingal, d.h.

$$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n, \quad n = -1, -2, \ldots$$

Weiter sei $\mathcal{F}_{-\infty} := \bigcap_{n=0}^{-\infty}$ und für feste $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ bezeichne analog zur Vorlesung $U_X(a, b, -N)$ die Anzahl der Upcrossings des Intervalls $[a, b]$ der Folge $X_0, X_{-1}, \ldots$ bis zum Zeitpunkt $-N$. Zeigen Sie:

a) Die Folge $(E(U_X(a, b, -N)))_{N\in\mathbb{N}}$ ist gleichmäßig beschränkt. Wenden Sie hierfür die Doob'sche Upcrossingungleichung auf das Martingal $X_{-N}, \ldots, X_0$ an.

b) Es existiert eine $\mathcal{F}_{-\infty}$-messbare Zufallsvariable $X_{-\infty}$, für die fast sicher gilt

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X_{-\infty}.$$

c) Ist die Folge (X_n) sogar gleichmäßig beschränkt, so ist

$$E(X_0|\mathcal{F}_{-\infty}) = X_{-\infty}.$$