Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. Hajo Holzmann
M. Sc. Philipp Naumann

Wintersemester 2012/2013

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie (Stochastik II)

– Blatt 14 (Bonusblatt) –

Abgabe: Montag, den 11.02.2013, 12:00 Uhr, HG 00/0070

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Gegeben sei eine Brownsche Bewegung $(B_t)_{t\geqslant 0}$. Diese besitzt nach Definition fast sicher stetige Pfade. Man konstruiere daraus eine Brownsche Bewegung $(\tilde{B}_t)_{t\geqslant 0}$ mit ausschließlich stetigen Pfaden.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $(B_t)_{t\geqslant 0}$ eine Brownsche Bewegung. Der *Ornstein-Uhlenbeck Prozess* ist definiert durch

$$X_t = e^{-t}B(e^{2t}) \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie:

a) $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ ist ein stationärer Gaußprozess, d.h. ein Gaußprozess so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t_1 < \ldots t_n$ mit $t_j \in \mathbb{R}$ und $h \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+h}, \ldots, X_{t_n+h}).$$

b) Der Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ ist reversibel in der Zeit, d.h. die endlich-dimensionalen Randverteilungen von $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ und $(X_{-t})_{t\in\mathbb{R}}$ sind gleich.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass für eine Brownsche Bewegung $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$, die Prozesse

$$\left(\exp\left\{B_t - \frac{1}{2}t\right\}\right)_{t\geqslant 0} \qquad \text{und} \qquad \left(B_t^3 - 3tB_t\right)_{t\geqslant 0}$$

Martingale bzgl. der von B erzeugten Filtration sind.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ eine Brownsche Bewegung mit ausschließlich stetigen Pfaden und $B_0 = 0$. Für relle Zahlen $a, b > 0$ reelle Zahlen definieren wir $T_{a,-b} : \Omega \to [0, \infty]$ durch

$$T_{a,-b} := \inf\{t \geqslant 0 \mid B_t = a \text{ oder } B_t = -b\}.$$

a) Zeigen Sie

$$\{T_{a,-b} \leqslant t\} = \{\max_{0\leqslant s\leqslant t} B_s \geqslant a\} \cup \{\min_{0\leqslant s\leqslant t} B_s \leqslant -b\}$$

und folgern Sie hieraus, dass $T_{a,-b}$ eine numerische Zufallsvariable ist.

b) Zeigen Sie, dass die beiden numerischen Zufallsvariablen $T_{a,-b}$ und $b^2T_{a/b,-1}$ die gleiche Verteilung haben.