Philipps-Universität Marburg
Fb Mathematik u. Informatik

Prof. Dr. Hajo Holzmann
Daniel Hohmann
Jochen Wilmsmeyer

WS 2013/14

Elementare Stochastik

- Blatt 1 -

Abgabe: Fr, 25.10.13

Aufgabe 1 (2+2 Punkte, L)**.** In einem Sack befinden sich vier Kugeln, je zwei mit den Farben rot und blau. Sie ziehen (ohne Zurücklegen) nacheinander zwei Kugeln und notieren sich, welche Farben Sie in welcher Reihenfolge gezogen haben (r='rot', b='blau').

a. Modellieren Sie dieses Experiment durch die Wahl eines geeigneten diskreten Wahrscheinlichkeitsraums (Ω, P).

b. Sind alle möglichen Ergebnisse $\omega \in \Omega$ gleich wahrscheinlich? Woher kommt das?

Aufgabe 2 (3+1 Punkte)**.** Gegeben seien drei identische Kartenspiele mit jeweils n unterschiedlichen Karten. Zunächst mischen Sie jedes Kartenspiel. Danach decken Sie n-mal die jeweils oberste Karte der drei Kartenspiele auf.

a. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stimmen bei mindestens einem Aufdecken die drei gezogenen Karten überein?

b. Wie verändert sich diese Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$?

Aufgabe 3 (3+1 Punkte)**.** Es seien (Ω, P) ein diskreter W-Raum und $A_1, A_2, \ldots \subset \Omega$ Ereignisse.

a. Beweisen Sie

$$\mathrm{P}\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{P}(A_k)\,.$$

b. Angenommen, die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ treten jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.95 <u>nicht</u> ein. Zeigen Sie, dass dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eines dieser Ereignisse eintritt, höchstens $n \cdot 0.05$ beträgt. Warum ist diese Abschätzung für $n \geq 20$ ohne Aussagekraft?

Aufgabe 4 (2+2 Punkte)**.** Seien Ω eine nichtleere Menge, I eine beliebige Indexmenge und $A_i \subset \Omega$, $i \in I$. Beweisen Sie die *de Morgan'schen Rechenregeln*

$$\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)^{\complement} = \bigcap_{i\in I} A_i^{\complement}, \qquad \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)^{\complement} = \bigcup_{i\in I} A_i^{\complement}.$$

Aufgabe 5 (8 Punkte, L). Die Seiten von zwei Würfeln sind mit den folgenden Zahlen beschriftet:

$$W_1 : 4-4-4-4-4-1, \qquad W_2 : 5-5-5-2-2-2.$$

a. Spieler A würfelt einmal mit W_1, Spieler B einmal mit W_2. Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) für dieses Spiel an.

b. Die Spielregel lautet: 'Wer die höhere Augenzahl wirft, gewinnt.' Spieler A darf sich jetzt einen der beiden Würfel aussuchen. Welchen Würfel sollte er wählen? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe einer geeigneten Rechnung.

c. Die Spielregel wird erweitert: Der Gewinner erhält vom Verlierer die Differenz der Augenzahlen in €. Wieder darf sich Spieler A einen der beiden Würfel aussuchen. Welchen Würfel sollte er diesmal wählen?

d. Beschriften Sie einen dritten Würfel W_3 so, dass das Spiel aus b stets für denjenigen vorteilhaft ist, der als zweiter einen Würfel wählen darf. Gibt es dafür mehrere Möglichkeiten? Beschreiben Sie, durch welche Überlegungen Sie zu Ihrer Lösung gelangt sind.

e. Untersuchen Sie, ob es weitere Möglichkeiten gibt, drei Würfel so zu beschriften, dass stets der Spieler im Vorteil ist, der als zweiter wählen darf.

f. Überlegen und erläutern Sie mindestens zwei weitere Beispiele - mathematische oder aus dem 'Alltag' -, in der eine vergleichbare 'zyklische Hierarchie' wie die unter den drei Würfeln gegeben ist.

g. Angenommen, es sind drei Spieler, die mit den drei Würfeln aus d spielen. Formulieren Sie zunächst wieder einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum und klären Sie dann, wer bei diesem Spiel gewinnt, wenn es (nur) um die höchste Augenzahl geht.

Zum Weiterdenken (geht nicht in die Bewertung ein): Wie kann man vier Würfel so beschriften, dass eine 'zirklische Hierarchie' gegeben ist?

Hinweis

Bachelor- und Masterstudenten bearbeiten die Aufgaben 1-4. Lehramtsstudenten bearbeiten die beiden mit 'L' gekennzeichneten Aufgaben sowie eine weitere Aufgabe nach Wahl.