Philipps-Universität Marburg
Fb Mathematik u. Informatik

Prof. Dr. Hajo Holzmann
Daniel Hohmann
Jochen Wilmsmeyer

WS 2013/14

Elementare Stochastik

- Blatt 10 -

Abgabe: Fr, 17.01.14

Aufgabe 49 (4 Punkte)**.** Es sei (Ω, P) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

a. Zeigen Sie, dass Ereignisse $A, B \subset \Omega$ genau dann stochastisch unabhängig sind, wenn die Zufallsvariablen $\mathbf{1}_A$ und $\mathbf{1}_B$ unabhängig sind.

b. Zeigen Sie, dass zwei Zufallsvariablen X und Y genau dann stochastisch unabhängig sind, wenn für alle beschränkten Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\mathrm{E}\big(f(X)g(Y)\big) = \mathrm{E}\big(f(X)\big)\,\mathrm{E}\big(g(Y)\big).$$

Aufgabe 50 (4 Punkte)**. a.** Es sei (Ω, P) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass die Abbildung (siehe Definition 8.1.3)

$$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1], \quad F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x)$$

(i) monoton wachsend und

(ii) rechtsseitig stetig ist sowie

(iii) $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$ erfüllt.

b. Sei nun X_n gleichverteilt auf der Menge $\{1/n, 2/n, \ldots, 1\}$ und bezeichne F_n die Verteilungsfunktion von X_n. Skizzieren Sie F_n und zeigen Sie, dass F_n für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen $F(x) = x \cdot \mathbf{1}_{[0,1]}(x) + \mathbf{1}_{(1,\infty)}(x)$ konvergiert.

Aufgabe 51 (4 Punkte)**. a.** Es seien $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda_1)$ und $Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda_2)$ stochastisch unabhängig. Zeigen Sie $X + Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

b. Folgern Sie, dass für die Folge $X_n \sim \mathrm{Pois}(n\lambda)$, $n \in \mathbb{N}$, gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\Big(\sqrt{\frac{n}{\lambda}}\big(X_n/n - \lambda\big) \leq y\Big) = \Phi(y), \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 52 (4 Punkte)**.** Es sei $X_n \sim \mathrm{Pois}(\lambda_n)$, $n \in \mathbb{N}$, wobei gelte $\lambda_n \to \infty$. Zeigen Sie: Ist k_n eine Folge in $\mathbb{N}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} (k_n - \lambda_n)/\sqrt{\lambda_n} = \xi$$

für ein $\xi \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\lambda_n}\,\mathrm{P}\big(X_n = k_n\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\xi^2/2}.$$

Aufgabe 53 (4 Punkte)**.** Student A legt den täglichen Weg zur Uni mit den nicht aufeinander abgestimmten Verkehrsmitteln Bus und Bahn zurück. Mit 80 % Wahrscheinlichkeit wird ein direkter Anschluss Bus/Bahn gerade noch erreicht, mit 20 % Wahrscheinlichkeit muss er 30 Minuten auf den nächsten Zug warten.

a. Die Zufallsgröße X_i sei wie folgt definiert: $X_i = 1$ falls bei einer beliebig herausgegriffenen Fahrt i der Anschluss nicht erreicht wird, $X_i = 0$ sonst. Geben Sie die Verteilung, den Erwartungswert und die Varianz von X_i an.

b. Die Zufallsgröße Y beschreibe die Wartezeit (in Minuten) des Studenten im Laufe eines Jahres (175 Fahrten). Bestimmen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes eine Approximation der Verteilungsfunktion $F_Y(x) = \mathrm{P}(Y \leq x)$ von Y.

c. Der Student liest nur während der Wartezeiten den neuen Band von Harry Potter und veranschlagt dafür 15 Stunden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er laut b das Buch am Ende des Jahres durchgelesen?

Aufgabe 54 (4 Punkte)**.** Jedes Jahr findet zu Beginn des Wintersemesters eine Computereinführungsveranstaltung statt. Aus langjähriger Erfahrung weiß man, dass etwa 18 % der angemeldeten Kursteilnehmer nicht zum Kurs erscheinen. Und da jeder Teilnehmer einen eigenen Rechner während des Kurses braucht, können nicht mehr Teilnehmer als freie Computer am Kurs teilnehmen. Diese Jahr gibt es insgesamt 260 Erstsemester und 220 freie Plätze. Berechnen Sie mittels Approximation durch den zentralen Grenzwertsatz

1. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Kursteilnehmer, die zum Kurs erscheinen, einen Platz finden, wenn sich für den Kurs alle Erstsemester angemeldet haben.
2. wie viele Anmeldungen höchstens angenommen werden dürfen, wenn mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.99 alle erscheinenden Kursteilnehmer in einem Kurs mit 220 Plätzen einen Platz finden sollen.

Aufgabe 55 (4 Punkte)**.** Um ihr Studium zu finanzieren jobben Sie nebenbei als Interviewer und befragen bei einer ihrer Missionen zufällig Wahlberechtigte um das Wahlergebnis einer bestimmten Partei vorherzusagen. Bestimmen Sie approximativ, wie viele Wähler Sie befragen müssen, damit Sie sich bei Ihrer Prognose mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.9 um höchstens 5 % irren? Benutzen Sie zur Approximation den zentralen Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace.

Hinweis

Dies ist ein reines Bonusblatt. Sie dürfen beliebig viele Aufgaben bearbeiten und alle erreichten Punkte gehen als Bonuspunkte in die Wertung ein.