

Elementare Stochastik

- Blatt 11 -

Abgabe: Fr, 24.01.14

Aufgabe 56 (4 Punkte). Die Anzahl N der Fische in einem Teich soll geschätzt werden. Hierzu fängt man zunächst R Fische, markiert diese und lässt sie wieder frei. Nach genügend langer Wartezeit fängt man erneut n Fische aus dem Teich und zählt, wie viele von diesen eine Markierung besitzen.

a. Geben Sie ein statistisches Modell für die Verteilung der Anzahl der im zweiten Fang markierten Fische an.

b. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer \hat{N}_{ML} für N .

Aufgabe 57 (4 Punkte). Gegeben seien m unabhängige Beobachtungen eines multinomialverteilten Zufallsvektors $X = (X_1, \dots, X_s) \sim \text{Mult}(n; p_1, \dots, p_s)$, wobei n als bekannt und $p = (p_1, \dots, p_s)$ als unbekannt angenommen werden. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer \hat{p}_{ML} für p mit Hilfe der Log-Likelihood-Funktion.

Aufgabe 58 (4 Punkte). Gegeben seien n unabhängige Beobachtungen einer $\text{Pois}(\lambda)$ -verteilten Zufallsvariable mit unbekanntem Parameter $\lambda > 0$.

a. Konstruieren Sie einen zweiseitigen Test zu gegebenem Niveau $\alpha > 0$, um die einfache Hypothese

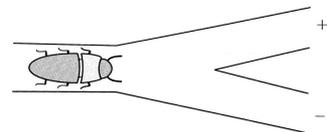
$$H_0 : \lambda = \lambda_0$$

für ein $\lambda_0 > 0$ zu testen.

b. Bestimmen Sie beispielhaft für $\lambda_0 = 10$ und $\lambda_0 = 1$ mögliche Verwerfungsbereiche zum Niveau $\alpha = 0.05$.

c. Bestimmen Sie zu Ihrem Test die Gütefunktion $\beta : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$.

Aufgabe 59 (4 Punkte). In einem Versuch mit einem zweifach-Wahlapparat soll untersucht werden, ob sich ein Käfer rein zufällig für einen der beiden Ausgänge entscheidet. Bei $n = 30$ unabhängigen Durchläufen wurde 18 mal der Ausgang „-“ und 12 mal das Ausgang „+“ gewählt. Spricht dieses Ergebnis *signifikant* für eine systematische Bevorzugung einer der beiden Ausgänge? Berechnen Sie hierfür den entsprechenden p-Wert.



Aufgabe 60 (5 Punkte, L). Kondome schützen vor Schwangerschaft und vor allem vor AIDS. Die Stiftung „Recht oder Schlecht“ hat 26 verschiedene Marken getestet. Ergebnis: Präservative sind sicherer als je zuvor. Zunächst untersuchte die Stiftung, wie haltbar Kondome sind. Im Bersttest, einem von mehreren Tests nach der EU-Norm EN 600, wurden die Kondome mit 18 Liter Luft aufgeblasen. Dabei dürfen aus einer Charge von 200 Kondomen höchstens 7 Kondome platzen. Im Vergleich zum letzten Test vor vier Jahren ergab sich ein deutlich besseres Ergebnis: Nur 37 Kondome von insgesamt 14 000 Kondomen platzten. Im Gesamturteil aller durchgeführten Tests erhielten 25 Marken die Gesamtnote *gut*. Nur die Marke „Strongex Orange“ fiel mit dem Gesamturteil *mangelhaft* durch, da bei zwei Chargen von je 200 Kondomen 11 bzw. 15 Kondome platzten.

a. Ein Marken kondom, das im Test mit *gut* beurteilt wurde, wird in Großpackungen à 36 Stück verkauft. Der Hersteller wirbt mit Hinweis auf den Test der Stiftung „Recht oder Schlecht“ damit, dass die Kondome dieser Marke den Bersttest bestanden haben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht jedes Kondom einer solchen Packung den Bersttest, wenn man für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kondom platzt,

(i) 0.035 (entsprechend der EU-Norm) bzw.

(ii) die Testergebnisse zugrunde legt?

b. Die Firma „Strongex“ verlangt für ihr Kondom „Strongex Orange“ einen Nachtest. Nach ihren eigenen, regelmäßigen, stichprobenartigen Kontrollen würden nur ca. 1.5% der Kondome dieser Marke den Bersttest nicht bestehen. Nehmen Sie zu dieser Behauptung Stellung!

Aufgabe 61 (3 Punkte, L). Der ADAC will überprüfen, ob bei Paaren in einer Beziehung Männer und Frauen gleich gut einparken können. Dazu lädt er 15 Paare im Alter von 30 bis 40 Jahren auf einen Verkehrsübungsplatz ein. Nacheinander sollen jeweils die Frau und der Mann in dieselbe, knapp bemessene Parklücke möglichst schnell rückwärts einparken. Der Einparkvorgang gilt als erfolgreich beendet, wenn der PKW korrekt und ohne Beschädigung der beteiligten Fahrzeuge in der Lücke steht. Die zum Einparken benötigte Zeit wird jeweils gestoppt.



Der Test bringt folgendes Ergebnis: Die Frauen waren 11 Mal schneller, die Männer 4 Mal. Interpretieren Sie dieses Ergebnis auf der Grundlage eines Hypothesentests, dem ein Signifikanzniveau von 5% zugrunde liegt.

Hinweis

Bachelor- und Masterstudenten bearbeiten die Aufgaben 56-59. Lehramtsstudenten bearbeiten die zwei mit 'L' gekennzeichneten Aufgaben sowie zwei weitere Aufgaben nach Wahl.