

Elementare Stochastik

- Blatt 12 -

Abgabe: Fr, 31.01.14

Aufgabe 62 (4 Punkte, L). Ein Experiment liefert unabhängige und identisch verteilte Werte $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$, wobei gelte $EX_1^2 < \infty$.

a. Zeigen Sie, dass der Schätzer

$$T_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$$

für jede Wahl von Gewichten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ mit $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$ *erwartungstreu* für $\mu = EX_1$ ist, d. h. dass gilt

$$E(T_n(X_1, \dots, X_n)) = \mu.$$

b. Bestimmen Sie die Gewichte $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ derart, dass $T_n(X_1, \dots, X_n)$ minimale Varianz besitzt.

Aufgabe 63 (4 Punkte, L). Aus einer Urne mit 10 Kugeln werden 6 Kugeln ohne zurücklegen gezogen. In der Urne befinden sich eine unbekannte Anzahl ϑ an schwarzen Kugeln. Es bezeichne X die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln.

a. Bestimmen Sie für jedes feste $\vartheta \in \{0, \dots, 10\}$ eine möglichst kleine Menge $A_\vartheta \subset \{0, \dots, 6\}$ mit

$$P_\vartheta(X \in A_\vartheta) \geq 0.9.$$

b. Geben Sie für jede mögliche Realisierung $X = x$ ein Konfidenzbereich $C(x)$ zum Irrtumsniveau $\alpha = 0.1$ an.

Aufgabe 64 (4 Punkte). Es seien $X_1, \dots, X_n \sim \text{Pois}(\lambda)$ stochastisch unabhängig. Setze $Y_n = X_1 + \dots + X_n$. Bestimmen Sie für den Parameter λ ein auf einer Beobachtung $Y_n = k$ basierendes, asymptotisches Konfidenzintervall zu gegebenem Irrtumsniveau $\alpha > 0$.

Aufgabe 65 (4 Punkte). Aufgrund langjähriger Erfahrungen ist bekannt, dass ein Standardmedikament zur Behandlung einer bestimmten Krankheit eine Erfolgsquote p_0 von 50 % besitzt. Eine Forschergruppe entwickelt ein neues Medikament von dem sie behauptet, dass es besser sei. Der Qualitätsunterschied zwischen ihrem und dem Standardmedikament sei aber erst dann relevant, wenn die Erfolgsquote p_1 des neuen Medikaments mindestens 58 % betrage. Die Gruppe stellt Ihnen folgende Frage:

Wie viele Personen müssen behandelt werden, damit ein Test der Hypothese $H_0 : p \leq 0.5$ zum Niveau $\alpha = 0.05$ wenigstens bei wahren $p_1 \geq 0.58$ die Nullhypothese mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $\gamma = 0.95$ tatsächlich verwirft? Beantworten Sie diese Frage, indem Sie den Mindeststichprobenumfang $n_{\min}$ näherungsweise mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes bestimmen.

Aufgabe 66 (4+2+2 Punkte, L). Man führt eine Stichprobe von n unabhängigen Bernoulli-Versuchen durch und möchte nun aufgrund der daraus berechneten relativen Häufigkeit h_n an Erfolgen zu einer vorgegebenen Sicherheitswahrscheinlichkeit α ein asymptotisches Konfidenzintervall $[p_1, p_2]$ für den (unbekannten) Parameter p bestimmen. Mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes ergeben sich die Grenzen p_1 und p_2 als die Lösungen der Gleichung

$$|h_n - p| = q_{\frac{1+\alpha}{2}} \frac{\sqrt{np(1-p)}}{n}, \quad (1)$$

wobei $q_{\frac{1+\alpha}{2}}$ das $\frac{1+\alpha}{2}$ -Quantil der Standardnormalverteilung bezeichne und damit die Gleichung $\Phi(q) - \Phi(-q) = \alpha$ löst. Eine Näherungslösung für p_1 und p_2 erhält man, wenn man auf der rechten Seite in (1) den nuisance-Parameter p durch die relative Häufigkeit h_n ersetzt. Dies liefert

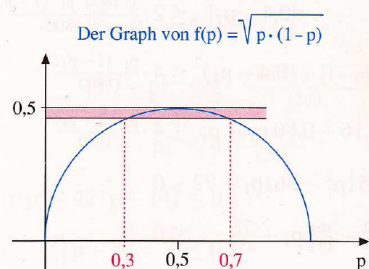
$$p_{1,2} = h_n \pm q_{\frac{1+\alpha}{2}} \frac{\sqrt{nh_n(1-h_n)}}{n}. \quad (2)$$

a. Lösen Sie die Gleichung (1) exakt. Formulieren Sie anhand des Ergebnisses eine numerische Bedingung, die eine Verwendung der Näherungslösung (2) «erlaubt».

b. In einem aktuellen Schulbuch¹ findet sich zur Klärung der Frage, wann die in Teil a angegebene Näherungslösung (2) verwendet werden darf, folgender Abschnitt:

Wir untersuchen nun, unter welchen Bedingungen die Anwendung des Näherungsverfahrens erlaubt und sinnvoll ist. Beim Näherungsverfahren wird im Prinzip nur der Term $f(p) = \sqrt{p \cdot (1-p)}$ abgeändert.

Da der Graph dieses Terms zwischen $p=0,3$ und $p=0,7$ sehr flach verläuft, führen kleine Abänderungen des Arguments p (das Ersetzen von p durch h_n) zu praktisch vernachlässigbar kleinen Änderungen des Wertes des Terms $f(p)$.



Man kann also folgende **Faustregel** formulieren: Liegt die relative Trefferhäufigkeit $h_n = \frac{x}{n}$ in einer Stichprobe vom Umfang n zwischen 0,3 und 0,7, so kann das Näherungsverfahren zur Bestimmung eines Konfidenzintervalls für die unbekannte Trefferwahrscheinlichkeit p in der Regel ohne Bedenken angewandt werden.

Erörtern Sie, inwieweit die hier gegebene «Faustregel» sinnvoll ist. Beziehen Sie dabei insbesondere auch die von Ihnen in Aufgabenteil a formulierte Bedingung mit ein.

c. Lösen Sie die folgende Aufgabe einmal exakt und einmal näherungsweise: Vor der Bürgermeister-Wahl möchte ein aussichtsreicher Kandidat seine Chancen testen. Eine Umfrage ergibt: Von 825 befragten Personen wollen 462 für ihn stimmen. Kann er mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 99.7% mit der absoluten Stimmenmehrheit rechnen?

Hinweis

Bachelor- und Masterstudenten bearbeiten die Aufgaben 62-65. Lehramtsstudenten bearbeiten die drei mit 'L' gekennzeichneten Aufgaben.

¹Mathematik 3.1, Gymnasiale Oberstufe Hessen Leistungskurs, S. 178, Hrsg. Bigalke/Köhler, Cornelsen 2011