

Elementare Stochastik

- Blatt 13 -

Abgabe: Fr, 7.2.14

Aufgabe 67 (4 Punkte, L). Ein Experiment liefert unabhängige und identisch verteilte Werte $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$, wobei gelte $\rho = EX_1^2 < \infty$. Es sei $T_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ der varianzminimale Schätzer für den Erwartungswert $\mu = EX_1$ gemäß Aufgabe 62. Zeigen Sie, dass

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - T_n(x_1, \dots, x_n))^2$$

ein erwartungstreuer Schätzer für die Varianz $\sigma^2 = \text{Var}X_1$ ist, d. h. dass gilt

$$E(V_n(X_1, \dots, X_n)) = \sigma^2.$$

Aufgabe 68 (4 Punkte). Sei $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Dichte der Standardnormalverteilung,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$$

sowie $\Phi(y) = \int_{-\infty}^y \varphi(x) dx$, $y \in \mathbb{R}$, mit $\lim_{y \rightarrow \infty} \Phi(y) = 1$. Für $\alpha \in (0, 1)$ sei weiter q_α das α -Quantil der Standardnormalverteilung, d. h. die eindeutige Lösung der Gleichung $\Phi(q) = \alpha$. Zeigen Sie:

$$\begin{array}{ll} (i) & \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x) dx = 0 \\ (ii) & \int_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi(x) dx = 1 \\ (iii) & \Phi(y) = 1 - \Phi(-y) \\ (iv) & q_{1-\alpha} = -q_\alpha \end{array}$$

Aufgabe 69 (4 Punkte). Für $r \in \mathbb{N}$ seien $Y_r \sim \text{Negbin}(r, p)$ für ein $p \in (0, 1)$.

a. Zeigen Sie, dass für $X \sim \text{Geom}(p)$ unabhängig von Y_r die Summe $Y_r + X$ Negbin($r+1, p$)-verteilt ist.

b. Berechnen Sie mit Hilfe von a den Erwartungswert und die Varianz von Y_r .

c. Bestimmen Sie schließlich ein (für $r \rightarrow \infty$) asymptotisches Konfidenzintervall für den Parameter p zu gegebenem Konfidenzniveau $\alpha > 0$ basierend auf einer Beobachtung $Y_r = k$.

Aufgabe 70 (4 Punkte). Sei $Y_\lambda \sim \text{Pois}(\lambda)$. Konstruieren Sie ein auf einer Beobachtung $Y_\lambda = k$ basierendes, exaktes Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $\alpha > 0$ für den Parameter $\lambda > 0$.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass die Funktion $\lambda \mapsto P(Y_\lambda \leq k)$ monoton fallend und stetig ist mit $\lim_{\lambda \rightarrow 0} P(Y_\lambda \leq k) = 1$ und $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} P(Y_\lambda \leq k) = 0$.

Aufgabe 71 (4 Punkte, L). Eine Großstadt hat 523 740 wahlberechtigte Einwohner. Bei der bevorstehenden Wahl erhofft sich die Partei G die absolute Mehrheit. Um nicht unnötig einen teuren Wahlkampf zu führen, beschließt sie, ihre Chancen durch eine repräsentative Umfrage untersuchen zu lassen. Falls man aufgrund des Ergebnisses einen Stimmenanteil von mehr als 55 % aller Wahlberechtigten erwarten kann, will sich die Partei einen aufwändigen Wahlkampf sparen.

Ein Amateurstatistiker erläutert den Parteistrategen: „Wir befragen repräsentativ 200 wahlberechtigte Personen. Die Hypothese, dass Sie einen Stimmenanteil von höchstens 55 % erwarten können, wird mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5 % erst dann abgelehnt, wenn sich unter den 200 Befragten mindestens 123 für Sie entscheiden, anderenfalls empfehle ich weitere Wahlkampfmaßnahmen.“

a. Zeigen Sie, dass die Zahl von 122 Personen korrekt bestimmt ist.

b. Bestimmen Sie unter der Annahme, dass die Partei G zu diesem Zeitpunkt einen Stimmenanteil von 60 % bekäme, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dennoch ein aufwändiger Wahlkampf geführt wird. Begründen Sie, warum dieser Wert so hoch ist, und interpretieren Sie dies im Kontext.

Aufgabe 72 (4 Punkte, L). In Deutschland gilt für Bundes- und Landtagswahlen die 5-Prozent-Klausel. Die Partei Q erhofft den Einzug in den Landtag. Sie geht von höchstens 80 % Wahlbeteiligung aus, braucht also nur 4 % der Stimmen aller Wahlberechtigten. Um ihre Chancen einschätzen zu können, beauftragt sie deshalb ein Wahlforschungsinstitut und dessen repräsentative Umfrage umfasst 1100 wahlberechtigte Personen. Die Partei Q erhält vom Wahlforschungsinstitut das Ergebnis mitgeteilt, dass 5.4 % der befragten Personen die Partei Q wählen und auch zur Wahl gehen würden.

Kann die Partei Q aufgrund dieser Umfrage mit 95-prozentiger Sicherheit damit rechnen, ins Parlament einzuziehen?

Hinweis

Bachelor- und Masterstudenten bearbeiten die Aufgaben 67-70. Lehramtsstudenten bearbeiten die drei mit 'L' gekennzeichneten Aufgaben sowie eine weitere Aufgabe nach Wahl.