Philipps-Universität Marburg
Fb Mathematik u. Informatik

Prof. Dr. Hajo Holzmann
Daniel Hohmann
Jochen Wilmsmeyer

WS 2013/14

Elementare Stochastik

- Blatt 2 -

Abgabe: Fr, 1.11.13

Aufgabe 6 (4 Punkte + 2 Bonuspunkte). Sei $\Omega = \Omega_{\text{II}}^{n,n}$ die Menge aller Permutationen der Zahlen $1, \ldots, n$. Für $1 \leq i < j \leq n$ sagen wir $\omega \in \Omega$ weist eine i-j-Transposition auf, wenn gilt $\omega_i = j$ und $\omega_j = i$, und bezeichnen mit $A_{i,j}$ die Menge Permutationen, die eine solche Transpositionen aufweisen.

a. Sei $I = \{(i,j) : 1 \leq i < j \leq n\}$ und $J \subset I$ mit $\operatorname{card} J = l \in \{1, \ldots, n(n-1)/2\}$. Definiere

$$A_J = \bigcap_{(i,j) \in J} A_{i,j}.$$

Beschreiben Sie die Teilmengen J, für die gilt $A_J \neq \emptyset$. Bestimmen Sie für solche Indexmengen $\operatorname{card} A_J$ in Abhängigkeit von l.

b. Wie viele Teilmengen $J \subset I$ gibt es mit $\operatorname{card} J = l$ und $A_J \neq \emptyset$?

c. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig gewählte Permutation $\omega \in \Omega$, wobei alle Permutationen als gleich wahrscheinlich angenommen werden, mindestens eine Transposition aufweist. Wie verhält sich diese Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$?

Aufgabe 7 (4 Punkte). **a.** Zeigen Sie analytisch die für die hypergeometrische Verteilung in der Vorlesung motivierte Symmetrie

$$\text{Hyp}(r; n, R, N) = \text{Hyp}(r; R, n, N)$$

mit $n \leq N$ und $r \leq \min\{n, R\}$.

b. Was bedeutet dies anschaulich bspw. für die Anzahl der Buben im Skat (Bsp. 2.4.2.2 der VL)?

Aufgabe 8 (4 Punkte). Beim Pokerspiel Texas Hold'em wird ein 52-Blatt Kartenspiel, das 4 Asse enthält, gut gemischt. Dann erhält jeder von 10 Spielern zu Beginn zwei Karten auf die Hand. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält mindestens ein Spieler zwei Asse?

Aufgabe 9 (4 Punkte, L). **a.** Das Urnenmodell *'Ziehen mit Rücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge'* lässt sich alternativ charakterisieren durch die Ergebnismenge

$$\Omega_{\text{IV}}^{k,n} = \big\{(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{N}_0^n : \omega_1 + \ldots + \omega_n = k\big\},$$

wobei eine Ausprägung $\omega_i = k_i$ dann bedeutet, dass die Zahl i gerade k_i mal gezogen wurde. Visuell lässt sich jedes $\omega \in \Omega_{\text{IV}}^{k,n}$ eindeutig beschreiben durch eine Anordnung der Form

$$\bullet\bullet \,|\, \bullet\bullet\bullet \,|\, \ldots \,|\bullet$$

mit k Punkten und $n-1$ Strichen, wobei die Anzahl der Punkte zwischen den Abgrenzungen gerade den k_i entsprechen. Bestimmen Sie die Anzahl an verschiedenen Anordnungsmöglichkeiten von Punkten und Strichen dieser Darstellung und beweisen Sie damit erneut die Formel

$$\operatorname{card} \Omega_{\mathrm{IV}}^{k,n} = \binom{k+n-1}{k}.$$

b. Unter einem Monom in n Variablen vom Grad k versteht man eine Funktion m der Form

$$m(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{k_i}$$

mit $k_i \in \mathbb{N}_0$ und $k_1 + \ldots + k_n = k$. Bezeichnen wir mit $M_{k,n}$ die Menge aller solchen Monome, so gilt offensichtlich $\operatorname{card} M_{k,n} = \operatorname{card} \Omega_{\mathrm{IV}}^{k,n}$. Beweisen Sie damit die Formel für die Summe verschobener Binomialkoeffizienten,

$$\sum_{l=0}^{k} \binom{n+l}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}.$$

Aufgabe 10 (5 Punkte, L)**.** *Mastermind*, im deutschen Sprachraum auch unter dem Namen *Superhirn* bzw. *Super-Code* bekannt, ist ein Kombinationsspiel für zwei Spieler. Dabei versucht der eine Spieler, eine verdeckte Kombination aus farbigen Steckern zu erraten, die sich der andere ausgedacht hat. Zunächst sind noch keinerlei Hinweise vorhanden, so dass der erste Tipp 'blind' abgegeben werden muss. Jeder Versuch wird von der Gegenseite mit kleinen schwarzen und weißen Steckern bewertet, die anzeigen, wie gut der Tipp mit der Lösung übereinstimmt: Ein schwarzer Stecker zeigt an, dass einer der farbigen Spielsteine bereits richtig platziert ist (d.h. Farbe und Position stimmen mit der Lösung überein), sagt aber nichts darüber aus, um welchen Spielstein es sich handelt. Ein weißer Stecker wird für einen Spielstein gesetzt, dessen Farbe in der Lösung vorkommt, wenn auch an einer anderen Stelle.

Das Spiel gibt es in verschiedenen Varianten. Alle folgenden Fragen beziehen sich auf die Original-Version von 1973. Bei dieser ist eine Kombination aus vier Farben zu erraten, wobei sechs Farben zur Verfügung stehen.

i. Wie viele Farbkombinationen sind möglich, wenn ...

a) keine Farbe mehrfach vorkommen darf,

b) höchstens eine Farbe doppelt vorkommen darf, die aber nicht vorher festgelegt ist,

c) jede Farbe höchstens doppelt vorkommen darf,

d) jede Farbe auch beliebig oft vorkommen darf,

e) statt eines farbigen Steckers auch (höchstens) eine Lücke gelassen werden darf, aber keine Farbe mehrfach vorkommen darf.

Im folgenden gelte stets die Bedingung, dass keine Farbe mehrfach vorkommen darf und dass keine Lücke gelassen werden darf. Wie viele Kombinationen können noch richtig sein, wenn der ratende Spieler auf seinen ersten Versuch hin von der Gegenseite ...

f) zwei schwarze Stifte erhält,

g) zwei weiße Stifte erhält,

h) einen schwarzen und einen weißen Stift erhält,

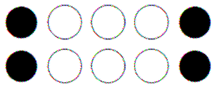
i) zwei schwarze und zwei weiße Stifte erhält,

j) einen schwarzen Stift erhält.

ii. Formulieren Sie für die Teile a), b), f) und h) ergänzend zur Rechnung jeweils eine auch für jüngere Schüler verständliche Begründung ohne Rückgriff auf kombinatorische Urnenmodelle.

Aufgabe 11 (3 Punkte, L)**.** Zehn Weinflaschen, davon vier Rotweinflaschen, werden zufällig in ein kleines, rechteckiges Regal, bestehend aus zwei Reihen à fünf freien Plätzen, einsortiert.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Rotweinflaschen dabei die vier Eckplätze einnehmen?



Argumentieren Sie hierfür auf drei verschiedene Weisen und erläutern Sie, welches mathematische Vorwissen jeweils nötig ist.

Hinweis

Bachelor- und Masterstudenten bearbeiten die Aufgaben 6-9. Lehramtsstudenten bearbeiten die drei mit 'L' gekennzeichneten Aufgaben sowie eine weitere Aufgabe nach Wahl.