

Elementare Stochastik

- Blatt 3 -

Abgabe: Fr, 8.11.13

Aufgabe 12 (4 Punkte). Seien (Ω, P) ein diskreter W-Raum, Ω' ein weiterer diskreter, nichtleerer Ergebnisraum sowie $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega'$ eine beliebige Abbildung. Man definiert das Bildmaß P_φ von P unter φ gemäß

$$P_\varphi(A) = P(\varphi^{-1}(A)), \quad A \subset \Omega'.$$

a. Zeigen Sie, dass (Ω', P_φ) ein diskreter W-Raum ist.

b. Sei nun (Ω, P) ein Laplace-Raum. Zeigen Sie, dass in dem Fall auch (Ω', P_φ) genau dann ein Laplace-Raum ist, wenn ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\text{card } \varphi^{-1}(\{\omega'\}) = N, \quad \omega' \in \Omega'.$$

Aufgabe 13 (4 Punkte, L). In einer Urne befinden sich N Kugeln mit den Nummern $1, \dots, N$. Für ein $R \leq N$ seien die Kugeln mit den Nummern $1, \dots, R$ weiß, die restlichen schwarz. Sie ziehen n Kugeln mit Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge.

a. Modellieren Sie dieses Experiment durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) .

b. Die Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \{0, \dots, n\}$ beschreibe die Anzahl an gezogenen weißen Kugeln. Geben Sie X als Funktion auf Ω explizit an und bestimmen Sie dessen Verteilung.

Aufgabe 14 (4 Punkte). *Einfache Irrfahrt*: Seien $\Omega_n = \{-1, 1\}^n$ und P_n die Laplace-Verteilung auf Ω_n . Für $0 \leq k \leq n$ seien die Zufallsvariablen $S_k : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$S_0(\omega) = 0, \quad S_k(\omega) = \sum_{i=1}^k \omega_i, \quad \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega_n.$$

a. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k den Bildbereich $S_k(\Omega_n)$ sowie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von S_k auf diesem.

b. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich die Irrfahrt S_k zum Endzeitpunkt n wieder in ihrem Ausgangspunkt?

c. Wie verhält sich diese Wahrscheinlichkeit für $n \rightarrow \infty$.

Aufgabe 15 (4 Punkte). *Verteilung des Maximums:* Seien (Ω_n, P_n) und $(S_k)_{k=0, \dots, n}$ wie in Aufgabe 14. Weiter sei $M_n = \max\{S_0, \dots, S_n\}$.

a. Zeigen Sie mit Hilfe eines *Spiegelungsprinzips*, dass für $i, j \in \{-n, \dots, n\}$ mit $j \geq 0, i \leq j$ gilt

$$P_n(M_n \geq j, S_n = i) = P_n(S_n = 2j - i).$$

b. Zeigen Sie mit Teil a, dass

$$P_n(M_n = j, S_n = i) = P_n(S_n = 2j - i) - P_n(S_n = 2(j + 1) - i).$$

c. Folgern sie schließlich

$$P_n(M_n = j) = P_n(S_n \in \{j, j + 1\}), \quad 0 \leq j \leq n.$$

Aufgabe 16 (3 Punkte, L). a. Ein Bäcker backt für eine Verlosung 200 Muffins und mischt in den Teig fünf kleine Kapseln mit Zetteln für die Gewinne. Mit welcher Wahrscheinlichkeit landen zwei (oder mehr) dieser Kapseln in ein und dem selben Muffin?

b. Für einen Kindergeburtstag stellt der Bäcker 20 Muffins mit eingebackenen Gummibärchen her. Wie viele Gummibärchen muss er in den Teig kneten, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,99 in jedem Muffin mindestens ein Gummibärchen zu finden ist?

Aufgabe 17 (5 Punkte, L). *Eine Aufgabe aus dem Kernlehrplan NRW:* Ein Spiel mit einem Würfel hat folgende Regeln: Man darf so lange mit einem Würfel würfeln, bis eine Zahl zum zweiten Mal erscheint, also z.B. 1-3-4-3-Stopp! Man darf sich so viele Punkte notieren, wie man Würfe geschafft hat, in diesem Beispiel also vier Punkte.

- (1) Es liegt folgender Spielverlauf vor: 2-1-5. Bei welchen Zahlen wäre das Spiel mit dem nächsten Wurf beendet?
- (2) Wie viele Punkte kannst Du mindestens oder höchstens in einem Spiel erreichen?
- (3) Wie viele verschiedene Spielverläufe gibt es, bei denen Du drei Punkte bekommst?
- (4) Du willst wissen, wie viele Punkte Du im Durchschnitt erhältst. Wie würdest Du vorgehen?

Aufgabenstellung:

a. Lösen Sie die Aufgabe auf Schülerniveau. Geben Sie zu Teil (3) oder zu Teil (4) zwei verschiedene Lösungswege an. Gehen Sie dabei in jedem Fall davon aus, dass der Begriff Erwartungswert noch nicht bekannt ist.

b. Benennen Sie die jeweils nötigen Lernvoraussetzungen.

c. Entwickeln Sie mindestens drei verschiedene Varianten des Spiels und lösen Sie für zwei davon die Aufgabenteile (2) und (3).

Hinweis

Bachelor- und Masterstudenten bearbeiten die Aufgaben 12-15. Lehramtsstudenten bearbeiten die drei mit 'L' gekennzeichneten Aufgaben sowie eine weitere Aufgabe nach Wahl.