

Elementare Stochastik

- Blatt 4 -

Abgabe: Fr, 15.11.13

Aufgabe 18 (4 Punkte). Ein Kinobesitzer fragt beim Ticketverkauf an der Kasse jeden Besucher nach seinem Geburtstag. Es ist bekannt, dass der erste Besucher, dessen Geburtstag bereits einmal genannt wurde, freien Eintritt erhält. Weiter nehmen wir an, dass die Geburtstage der Wartenden unabhängig voneinander und gleichverteilt sind.

a. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten Sie freien Eintritt, wenn vor Öffnen der Kasse genau k Personen vor Ihnen in der Schlange stehen?

b. An welcher Position sollten Sie sich demnach in die Schlange einreihen?

Aufgabe 19 (4 Punkte). In einer Urne befinden sich N durchnummerierte Kugeln. Sie ziehen n Mal ohne Rücklegen. Die Zufallsvariable X beschreibe die dabei kleinste gezogene Nummer. Bestimmen Sie den Wertebereich und die Verteilung von X .

Aufgabe 20 (4 Punkte, L). Eine Urne enthält zwei rote und drei schwarze Kugeln. Sie ziehen eine zufällig gewählte Kugel und legen anschließend eine Kugel der *anderen Farbe* in die Urne zurück. Diesen Vorgang wiederholen sie noch einmal und ziehen anschließend eine letzte Kugel aus der Urne.

a. Modellieren Sie dieses mehrstufige Experiment durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum und veranschaulichen Sie diesen in einem Baumdiagramm.

b. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die letzte gezogene Kugel rot?

c. Gegeben die letzte gezogene Kugel ist rot, mit welcher Wahrscheinlichkeit hatten Sie als erstes eine schwarze Kugel gezogen?

Aufgabe 21 (4 Punkte). Es seien $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ endliche Ergebnisräume mit jeweils k_l Elementen,

$$\Omega_l = \{\omega_{l,1}, \dots, \omega_{l,k_l}\}, \quad l = 1, \dots, n,$$

sowie P die Verteilung und $X_1, \dots, X_n$ die Projektionen auf $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ gemäß Vorlesung. Definiere $\mathbf{p}_l \in \mathbb{R}^{k_l}$ und $\mathbf{M}^{(l)} = (m_{i,j}^{(l)}) \in \mathbb{R}^{k_l \times k_{l-1}}$ durch

$$\mathbf{p}_l = \begin{pmatrix} P(\{X_l = \omega_{l,1}\}) \\ \vdots \\ P(\{X_l = \omega_{l,k_l}\}) \end{pmatrix}, \quad m_{i,j}^{(l)} = P(\{X_l = \omega_{l,i}\} | \{X_{l-1} = \omega_{l-1,j}\}).$$

a. Zeigen Sie, dass für $d = 2, \dots, n$ gilt $\mathbf{p}_d = \mathbf{M}^{(d)} \cdot \dots \cdot \mathbf{M}^{(2)} \cdot \mathbf{p}_1$.

b. Wie lassen sich die Einträge $m_{i,j}^{(l)}$ aus den Übergangswahrscheinlichkeiten p_j berechnen?

c. Wir nennen $(X_i)_{i=1}^n$ eine *Markov-Kette*, falls für $d = 2, \dots, n$ und beliebige $\mu_l \in \Omega_l$ gilt

$$P(\{X_d = \mu_d\} | \{X_{d-1} = \mu_{d-1}\} \cap \dots \cap \{X_1 = \mu_1\}) = P(\{X_d = \mu_d\} | \{X_{d-1} = \mu_{d-1}\}).$$

Vereinfachen Sie die Formel in b für eine Markov-Kette $(X_i)_{i=1}^n$.

Aufgabe 22 (8 Punkte, L). Bei internationalen Sportwettkämpfen winkt den Siegern bekanntlich nicht nur die Ehre, sondern z.T. auch das große Geld in Form von Werbeverträgen. Es ist daher nicht verwunderlich, dass ehrgeizige Sportler und ihre Trainer mitunter zu unerlaubten Mitteln greifen, um sich Vorteile gegenüber den Konkurrenten zu verschaffen. Um möglichst faire Bedingungen zu gewährleisten, werden deshalb unmittelbar nach wichtigen Wettkämpfen, aber auch während der Trainingszeit, Kontrollen nach genau festgelegten Regeln durchgeführt. Die Sportler geben einen Becher Urin ab, der in zwei Teilen, einer so genannten A-Probe und einer B-Probe, versiegelt und gekennzeichnet wird.

Gehen Sie in der folgenden Aufgabe davon aus, dass bei einem großen Sportwettkampf von den 2200 Teilnehmern, die eine Urinprobe abgeben müssen, 55 mit einem speziellen Wirkstoff gedopt sind. Es werden alle 2200 A-Proben kontrolliert, wobei für den Test gelte:

- (i) Ist ein Sportler mit diesem Wirkstoff gedopt, so zeigt der Test dies mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_e = 0,8$ an. Man spricht dann von einem positiven Befund und bezeichnet p_e auch als Sensitivität des Tests.
- (ii) Hat sich ein Sportler korrekt verhalten, so bestätigt dies der Test mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_a = 0,95$. p_a heißt auch Spezifität des Tests.

Liegt ein positiver Befund der A-Probe vor, wird die B-Probe analysiert. Nehmen Sie an, dass die Ergebnisse von mehrfachen Dopingtests stochastisch unabhängig sind, dass also Fehler nur beim Testen und nicht durch irgendwelche besonderen Eigenschaften der Personen auftreten.

a. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Testergebnis der A-Probe eines zufällig ausgewählten Sportlers nicht den Tatsachen entspricht.

b. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein nach der A-Probe des Dopings bezichtigter Sportler zu Unrecht verdächtigt wird und begründen Sie, weshalb diese so erschreckend groß ist.

c. Weisen Sie nach, dass ein Sportler, bei dem die A- und die B-Probe positiv waren, mit einer Wahrscheinlichkeit von immer noch ca. 0,13 nicht gedopt war.

d. Da die Ergebnisse des Tests für Sportler, die sich an die Regeln halten, letztlich unzumutbar sind, muss der Test verbessert werden. Dazu soll zunächst untersucht werden, wie sich die in b und c berechneten Wahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von p_a bzw. p_e verändern. Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeiten also jeweils allgemein für folgende beiden Fälle:

- (i) p_e variabel und $p_a = 0,95$ fest
- (ii) p_a variabel und $p_e = 0,8$ fest

Stellen Sie die Funktionen im relevanten Bereich grafisch dar oder legen Sie eine Wertetabelle an, und zwar für

- (i) p_e von 0,8 bis 1,0 in 0,05-Schritten,
- (ii) p_a in 0,01-Schritten von 0,95 auf 1,0.

Interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang!

Hinweis

Bachelor- und Masterstudenten bearbeiten die Aufgaben 18-21. Lehramtsstudenten bearbeiten die zwei mit 'L' gekennzeichneten Aufgaben sowie eine weitere Aufgabe nach Wahl.