Philipps-Universität Marburg
Fb Mathematik u. Informatik

Prof. Dr. Hajo Holzmann
Daniel Hohmann
Jochen Wilmsmeyer

WS 2013/14

Elementare Stochastik

- Blatt 5 -

Abgabe: Fr, 22.11.13

Aufgabe 23 (4 Punkte)**.** Seien (Ω, P) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, \dots, A_n \subset \Omega$ mit $\mathrm{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) > 0$. Zeigen Sie, dass diese Ereignisse genau dann unabhängig sind, wenn für alle Indexmengen $I, J \subset \{1, \dots, n\}$ mit $I \cap J = \emptyset$ gilt

$$\mathrm{P}\big(\bigcap_{i\in I} A_i | \bigcap_{j\in J} A_j\big) = \mathrm{P}(\bigcap_{i\in I} A_i).$$

Aufgabe 24 (4 Punkte)**.** Zwei Cowboys stehen sich zum Duell gegenüber. Es sei bekannt, dass die Trefferwahrscheinlichkeit von Cowboy $i = 1, 2$ genau $p_i \in (0, 1)$ betrage.

a. Wie ist die Anzahl der benötigten Versuche jedes Cowboys bis zum ersten Treffer verteilt?

b. Angenommen, die zwei Cowboys schießen abwechselnd bis zum ersten Treffer. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt der Cowboy, der den ersten Schuss hat, auch das Duell?

c. Für welche Kombinationen von p_1 und p_2 haben unter b beide Cowboys dieselbe Gewinnwahrscheinlichkeit.

Aufgabe 25 (4 Punkte)**.** Die Zufallsvariable X sei *geometrisch verteilt* mit Parameter $p \in (0, 1)$, d. h. es gelte

$$\mathrm{P}(\{X = k\}) = (1 - p)^k p, \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

a. Beweisen Sie die sog. *Gedächtnislosigkeit* der geometrischen Verteilung,

$$\mathrm{P}(\{X = k + l\}|\{X \geq k\}) = \mathrm{P}(\{X = l\}), \qquad k, l \in \mathbb{N}_0. \tag{1}$$

b. Zeigen Sie, dass keine weitere Verteilung auf $\mathbb{N}_0$ existiert, die (1) erfüllt.

Aufgabe 26 (4 Punkte, L)**.** *Ziegenproblem.* Bei einer Game-Show befindet sich hinter einer von drei Türen ein Auto. Der Kandidat wählt eine Tür, woraufhin der Showmaster eine der beiden übrigen bzw. die übrige Tür öffnet, hinter der kein Auto steht. Der Kandidat hat nun die Option, von seiner ursprünglichen Wahl abzurücken und sich für die andere noch geschlossene Tür zu entscheiden. Sollte er dies tun? (Wir setzen voraus, dass er das Auto haben möchte.) Formalisieren Sie das Problem wie folgt:

a. Modellieren Sie die Situation als zweistufiges Experiment $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, wobei, für $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$, ω_1 die zunächst vom Kandidaten gewählte Tür und ω_2 die dann vom Showmaster geöffnete Tür beschreibe. Wir nehmen hierbei an, dass sich der Showmaster rein zufällig zwischen den noch möglichen Türen entscheidet. Außerdem können wir ohne Einschränkung annehmen, dass sich das

Auto hinter Tür eins befindet (wieso?). Erstellen Sie für dieses Experiment ein Baumdiagramm mit den entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeiten.

b. Beschreiben Sie das Ereignis 'Der Kandidat gewinnt das Auto' als Teilmenge von Ω für die beiden folgenden Strategien: Nach der Wahl des Showmasters ...

1. bleibt der Kandidat bei seiner Wahl.
2. wechselt der Kandidat noch einmal die Tür.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dieser beiden Ereignisse. Sollte der Kandidat wechseln?

c. Nehmen Sie nun an, der Kandidat hätte die Wahl zwischen n Türen, wobei sich wieder nur hinter einer der Türen ein Auto befindet. Nach der Wahl des Kandidaten öffnet der Showmaster eine derjenigen verbleibenen Türen, hinter denen sich das Auto nicht befindet. Sollte auch hier der Kandidat wechseln und sich rein zufällig für eine der verbleibenden Türen entscheiden? Was geschieht für $n \to \infty$?

Aufgabe 27 (8 Punkte, L)**.** Eine Reiseagentur bietet im Internet jede Woche 35 Plätze für einen Flug von Hamburg nach New York und zurück zum Preis von 300 € an. Diese sind immer kurz nach dem Erscheinen ausgebucht und bezahlt. Die Erfahrung zeigt, dass vor dem Abflug im Mittel ca. 20 % der gebuchten Reservierungen kurzfristig abgesagt werden. Da es sich um ein Sonderangebot handelt, bekommen die Kunden bei Stornierung kein Geld zurück. Die Agentur aber kann all diese Plätze leicht als 'Last-Minute-Angebote' für 250 € zum zweiten Mal verkaufen.

Die Doppeleinnahmen aufgrund von Stornierungen sind für die Agentur natürlich attraktiv, und sie lässt deshalb versuchsweise 40 Buchungen zu, also 5 Buchungen mehr als Plätze verfügbar sind. Diese 40 Angebote sind auch immer sofort ausgebucht und bezahlt. Wenn allerdings mehr als 35 gebuchte Kunden die Reise tatsächlich antreten wollen - im so genannten Überbuchungsfall -, muss die Agentur für die überzähligen Kunden dann sehr kurzfristig teure Ersatzplätze beschaffen. Insgesamt entstehen dem Reisebüro für jeden überzähligen Kunden zusätzliche Ausgaben von 400 €.

Für die folgenden Rechnungen soll angenommen werden, dass pro Termin die mögliche Anzahl von Stornierungen binomialverteilt ist. Verwenden Sie außerdem eine Stornierungswahrscheinlichkeit von exakt 0,2.

a. Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass für den nächsten Flugtermin bei dieser Agentur von **35** Plätzen ...

- genau 7 Plätze,
- höchstens 5 Plätze,
- mindestens 6 Plätze storniert werden.

b. Bestimmen Sie die Bilanz der Agentur für einen Reisetermin mit **40** ursprünglich verkauften Plätzen, wenn ...

- nur 30 regulär gebuchte Personen zum Abreisetermin erschienen sind, also noch 5 'Last-Minute-Tickets' verkauft wurden,
- alle 40 Bucher zum Abreisetermin erschienen sind.

c. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: Alle 40 regulären Kunden erscheinen zum Abreisetermin, keiner storniert.

Ü: Es kommt zum Überbuchungsfall.

d. Überprüfen Sie, ob sich das Geschäft mit den Überbuchungen lohnt. Berechnen Sie dazu jeweils den Erwartungswert für die Bilanz der Agentur, wenn sie ...

- immer nur genau 35 Plätze anbietet, abgesagte Plätze aber zum zweiten Mal verkauft,

- 40 Plätze anbietet und damit das Risiko der Überbuchung eingeht.

e. *Zum Weiterdenken:* Wie viele Plätze sollte die Agentur anbieten, um einen maximalen Gewinn zu erzielen?

Hinweis

- Bachelor- und Masterstudenten bearbeiten die Aufgaben 23-26. Lehramtsstudenten bearbeiten die zwei mit 'L' gekennzeichneten Aufgaben sowie eine weitere Aufgabe nach Wahl.
- Für die volle Punktzahl werden auf diesem Aufgabenblatt nur **8 Punkte** erwartet. Alle zusätzlich erreichten Punkte gehen als Bonuspunkte in die Wertung ein.