Philipps-Universität Marburg
Fb Mathematik u. Informatik

Prof. Dr. Hajo Holzmann
Daniel Hohmann
Jochen Wilmsmeyer

WS 2013/14

Elementare Stochastik

- Blatt 6 -

Abgabe: Fr, 29.11.13

Aufgabe 28 (4 Punkte)**.** Eine Kaffeeverpackungsmaschine produziert mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0.01$ eine undichte Verpackung. Berechnen Sie den exakten Wert und die Poisson-Approximation der Wahrscheinlichkeiten, dass sich in einer Partie von (i) 30 und (ii) 100 Verpackungen $k = 0, 1, 2, 3$ undichte Verpackungen befinden.

Aufgabe 29 (4 Punkte)**.** Man definiert die *momenterzeugende Funktion* $m_Z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ einer Zufallsvariable Z als den Erwartungswert der Zufallsvariable e^{tZ},

$$m_Z(t) = \mathrm{E}\big(e^{tZ}\big).$$

a. Zeigen Sie mit Hilfe der Transformationsformel für Erwartungswerte, dass für $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ und $Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$ gilt

$$m_X(t) = (1 + p(e^t - 1))^n, \qquad m_Y(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}.$$

b. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $X_n \sim \mathrm{Bin}(n, p_n)$, wobei gelte $np_n \to \lambda > 0$ für $n \to \infty$. Folgern Sie

$$\lim_{n\to\infty} m_{X_n}(t) = m_Y(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 30 (4 Punkte)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ seien $X_n \sim \mathrm{Hyp}(n, R_n, N_n)$, wobei gelte $N_n \geq n$ und $R_n/N_n =: p_n \to p \in (0, 1)$ für $n \to \infty$.

a. Berechnen Sie die Varianz von X_n. Verwenden Sie dafür Bsp. 3.2.2 aus der Vorlesung.

b. Beweisen Sie für $\varepsilon > 0$ die Abschätzung

$$\mathrm{P}\big(|X_n/n - p_n| \geq \varepsilon\big) \leq \frac{p_n(1 - p_n)}{n\varepsilon^2} \frac{N_n - n}{N_n - 1}.$$

c. Folgern Sie

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\big(|X_n/n - p| \geq \varepsilon\big) = 0, \qquad \varepsilon > 0.$$

Aufgabe 31 (4 Punkte)**.** Es seien (Ω, P) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$ beliebige Ereignisse.

a. Zeigen Sie, dass für $k = 1, \ldots, n$ gilt

$$\sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq n} \mathbf{1}_{A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}} \geq 0.$$

b. Folgern Sie, dass für $k = 1, \ldots, n$ die folgenden Abschätzungen für die Einschluss-Ausschluss-Formel gelten:

$$\mathrm{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \; \substack{\leq \\ \geq} \; \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq n} \mathrm{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}) \qquad \begin{array}{l} \text{falls } k \text{ ungerade} \\ \text{falls } k \text{ gerade} \end{array}$$

Aufgabe 32 (8 Punkte, L)**.** Eine Münze wird so lange geworfen, bis zweimal *hintereinander* Zahl gefallen ist.

a. Berechnen Sie mit elementaren Mitteln die Wahrscheinlichkeit p_k dafür, dass der Erfolg mit dem k-ten Wurf eintritt, und zwar für $k = 2$ bis $k = 6$.

b. Da Berechnungen wie in a für größere k sehr unübersichtlich werden, soll p_k nun *rekursiv* bestimmt werden. Dazu unterscheidet man die folgenden Ereignisse:

E_k: Die Kette endet nach k Würfen mit zweimal 'Zahl' hintereinander.

A_k: Die Kette endet nach k Würfen mit 'Bild' im vorletzten und 'Zahl' im letzten Wurf.

B_k: Die Kette endet nach k Würfen mit 'Bild' als letztem Wurf.

(In den Fällen A_k und B_k muss die Kette für einen Erfolg noch fortgesetzt werden.) Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten seien p_k, a_k und b_k. Begründen Sie schüleradäquat, dass für $k \in \mathbb{N}$ dann die folgenden Rekursionsformeln gelten:

$$\begin{aligned} p_k &= 0.5\,a_{k-1} && (1) \\ a_k &= 0.5\,b_{k-1} && (2) \\ b_k &= 0.5(a_{k-1} + b_{k-1}) && (3) \end{aligned}$$

Zeigen Sie mit (1) - (3) schließlich

$$p_{k+2} = 0.5\,p_{k+1} + 0.25\,p_k, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

oder geben Sie eine andere Begründung für deren Gültigkeit. Berechnen Sie mit Hilfe von (4) die Werte p_k bis $k = 16$. Berechnen Sie außerdem die Summe $\sum_{k=2}^{16} p_k$ und beschreiben Sie deren Bedeutung.

c. Gesucht ist jetzt die mittlere Wartezeit μ bis zum Erfolg. Ermitteln Sie als Näherungswerte zunächst

$$\sum_{k=2}^{n} k \cdot p_k$$

für $n = 12$ bis $n = 16$. Beweisen Sie dann die hier gültige *Mittelwert-Regel*

$$\mu = 0.25 \cdot 2 + 0.5 \cdot (1 + \mu) + 0.25 \cdot (2 + \mu)$$

und bestimmen Sie μ damit exakt.

e. (Zum Weiterdenken, ohne Bepunktung): Wie ändert sich die Mittelwert-Regel aus Teil c und damit auch μ, wenn ...

- für einen Erfolg dreimal (oder sogar viermal) hintereinander 'Zahl' fallen muss,
- bei einer gefälschten Münze die Wahrscheinlichkeit für 'Zahl' nur 0,4 beträgt.

Lösen Sie die Rekursionsformel (4) aus b in eine explizite Gleichung für $p(k)$ auf.

Hinweis

Bachelor- und Masterstudenten bearbeiten die Aufgaben 28-31. Lehramtsstudenten bearbeiten die mit 'L' gekennzeichnete Aufgabe sowie zwei weitere Aufgaben nach Wahl.