

Elementare Stochastik

- Blatt 7 -

Abgabe: Fr, 6.12.13

Aufgabe 33 (4 Punkte). *Binomialapproximation der hypergeometrischen Verteilung:* Für $l \in \mathbb{N}$ seien $X_l \sim \text{Hyp}(n, R_l, N_l)$, wobei gelte $N_l \rightarrow \infty$ und $R_l/N_l \rightarrow p \in (0, 1)$ für $l \rightarrow \infty$. Weiter sei $Y \sim \text{Bin}(n, p)$. Beweisen Sie

$$\lim_{l \rightarrow \infty} P(\{X_l = k\}) = P(\{Y = k\}), \quad k = 0, \dots, n.$$

Aufgabe 34 (4 Punkte, L). Ein unverfälschter Würfel wird drei Mal geworfen. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung der drei Zufallsgrößen *erster Wurf*, *Minimum* und *Maximum*. Notieren Sie außerdem für die beiden Fälle, dass der erste Wurf (i) eine 1 und (ii) eine 3 war die Werte dieser gemeinsamen Verteilung in einer Kontingenztafel.

Aufgabe 35 (4 Punkte). In einer Urne befinden sich N Kugeln, die in L unterscheidbare Gruppen unterteilt werden können. Die Anzahl der Kugeln in Gruppe i sei R_i , so dass $\sum_{i=1}^L R_i = N$. Sie ziehen n Kugeln ohne Rücklegen, und die Zufallsvariable X_i bezeichne die Anzahl an gezogenen Kugeln aus Gruppe i für $i = 1, \dots, L$.

- a. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von $X_1, \dots, X_L$.
- b. Bestimmen Sie für $i \neq j$ die Kovarianz $\text{Cov}(X_i, X_j)$.

Aufgabe 36 (4 Punkte, L). *Methode der kleinsten Quadrate:* Gegeben sei eine Stichprobe von n Messwerten $(y_1, x_1), \dots, (y_n, x_n)$ in $\mathbb{R}^2$, wobei zwischen den y_i und x_i ein linearer Zusammenhang der Form

$$y = ax + b$$

vermutet wird. Bestimmen Sie diejenigen Parameter $a, b \in \mathbb{R}$, die den Ausdruck

$$\sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$$

minimieren. Betrachten Sie hierfür einen geeigneten Zufallsvektor (Y, X) , auf den Sie dann Satz 6.3.6 der VL anwenden, um damit das Optimierungsproblem zu lösen.

Aufgabe 37 (8 Punkte, L). Mit dieser Aufgabe sollen Sie für die besonderen Schwierigkeiten beim Formulieren von Aufgabentexten sensibilisiert werden. Beim Erstellen von Arbeitsblättern oder Klassenarbeiten bzw. Klausuren werden Sie selbst immer wieder damit beschäftigt sein, präzise Arbeitsanweisungen zu erstellen. (Natürlich könnte man auch zusätzliche mündliche Erklärungen abgeben, aber auch diese können ggf. missverständlich aufgenommen werden.) Wenn Sie dann eine gute Formulierung gefunden haben, werden Sie überrascht sein, welche Fragen Ihre Schülerinnen und Schüler trotzdem noch stellen.

In der Stochastik ist das Problem von besonderer Bedeutung, da hier oft nicht von vorne herein klar ist, welcher Ansatz zu wählen ist. Die Gewöhnung an den daraus resultierenden notwendigen Modellierungsprozess gehört übrigens zu den Lernzielen des schulischen Stochastikunterrichts. Auch für Schülerinnen und Schüler mit eigentlich gutem Leseverständnis entstehen hier nicht zu unterschätzende Schwierigkeiten, die schnell zu Verunsicherungen führen können.

Im Folgenden sollen einige Original-Aufgaben aus verschiedenen Schulbüchern genauer betrachtet werden.

- a. Begründen Sie für Bsp. 1-5, warum die Aufgabenstellung nicht klar ist, indem Sie jeweils ...
- eine aufgrund des Textes nahe liegende Schülerfrage formulieren,
 - die Aufgabenstellung in mindestens zwei verschiedene Richtungen präzisieren (so dass sich die Frage nicht mehr stellt),
 - durch die Lösungen zu den präzisierten Aufgaben zeigen, dass durch die unterschiedliche Interpretation auch unterschiedliche Ergebnisse entstehen.
- b. Bisweilen findet man in Schulbüchern Problemstellungen, die mit 'gesundem Menschenverstand' gar keinen Sinn ergeben. Nehmen Sie in dieser Hinsicht Stellung zu der Aufgabe in Bsp. 6.
- c. Selbst wenn uns eine Aufgabe klar erscheint, kann es doch noch offenen Fragen geben, u. a. weil die Semantik der (Umgangs-) Sprache eben nicht so eindeutig ist wie die mathematische Terminologie. Prüfen Sie, welche Fragen sich bei den Aufgaben in Bsp. 7 und 8 stellen könnten.

Beispiele für die Lehramtsaufgabe 37

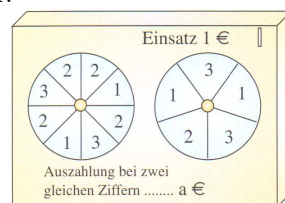
Beispiel 1. Ein Taschenrechner hat in seinem Sichtfenster Platz für 10 Zeichen. Durch ein besonderes Programm schreibt er zufällige Folgen von Ziffern und Buchstaben. Dabei erscheint mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0,4$ ein Buchstabe, mit der Wahrscheinlichkeit $q = 0,6$ eine Ziffer.

- a) Berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: Genau 4 Buchstaben (...)

aus: *Lambacher-Schweizer, Stochastik Grundkurs, Klett 1999, S.110*

Beispiel 2. Wie hoch muss der Auszahlungsbetrag a sein, wenn der Spieler im Mittel 40 % des Einsatzes als Gewinn verbuchen soll?



aus: *Mathematik 3.1 Gymnasiale Oberstufe Hessen, Leistungskurs, Cornelsen (2011), S.86*

Beispiel 3. Tick, Trick und Track finden bei einer Schatzsuche 4 Münzen, die sie untereinander zufällig aufteilen, wobei jede Aufteilungsmöglichkeit gleich wahrscheinlich sein soll.

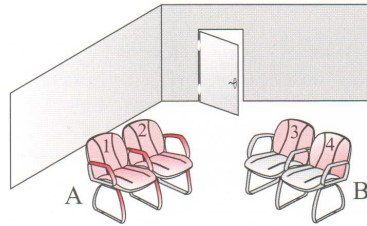
- a) Wie viele Aufteilungsmöglichkeiten gibt es? (...)

aus: *Mathematik 13.1 Leistungskurs Hessen, Cornelsen (2002), S.62*

Beispiel 4. Was ist wahrscheinlicher: Bei einer Tippreihe 6 Richtige im Lotto zu haben, oder dass ein Affe, der auf einer Schreibmaschine klimpert, das Wort 'affe' schreibt? (Die Schreibmaschine habe 50 Typen.)

aus: *Sigma, Grundkurs Stochastik, Klett (1982), S.43*

Beispiel 5. In einem Wartesaal stehen zwei Bänke A und B mit 4 Sitzplätzen 1 bis 4. Clever betritt den Wartesaal und setzt sich. Anschließend kommt Smart in den Raum und setzt sich ebenfalls. Beide setzen sich nach dem Zufallsprinzip. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden die beiden nebeneinander sitzen?



aus: *Mathematik 13.1 Leistungskurs Hessen, Cornelsen (2002), S.28*

Beispiel 6. Aus einem Beutel mit zwölf 50-Cent-Münzen, fünf 1-Euro-Münzen und acht 2-Euro-Münzen nimmt man zwei Münzen. Welchen Geldbetrag m wird man durchschnittlich herausziehen?

aus: *Lambacher-Schweizer 11/12, Mathematik für Gymnasien, Klett-Verlag (2010), S.328*

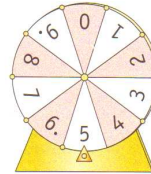
Beispiel 7. Bei folgenden Zufallsversuchen ist kein Grund ersichtlich, warum die verschiedenen möglichen Ergebnisse mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten auftreten sollten. Geben Sie die verschiedenen möglichen Ergebnisse und deren Wahrscheinlichkeiten an.



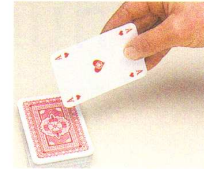
(1) Werfen eines Spielwürfels



(2) Werfen eines regulären Tetraeders



(3) Drehen eines Glücksrades mit 10 Sektoren



(4) Ziehen einer Karte aus 32 Skatkarten

aus: *Elemente der Mathematik, Qualifikationsphase Grund- und Leistungskurs, Schroedel (2011), S. 385*

Beispiel 8. Bei einem Spiel werden drei Kugeln zufällig auf drei Kästchen K_1 , K_2 , K_3 verteilt. Der Spieler versucht zu erraten, wie viele Kugeln in jedem Kästchen sind.

a) Auf wie viele Arten kann man die Kugeln auf die Kästchen verteilen? (...)

aus: *Lambacher-Schweizer, Stochastik Grundkurs, Klett (1999), S.110*

Hinweis

Bachelor- und Masterstudenten bearbeiten die Aufgaben 33-36. Lehramtsstudenten bearbeiten die drei mit 'L' gekennzeichneten Aufgaben.