Philipps-Universität Marburg
Fb Mathematik u. Informatik

Prof. Dr. Hajo Holzmann
Daniel Hohmann
Jochen Wilmsmeyer

WS 2013/14

Elementare Stochastik

- Blatt 9 -

Abgabe: Fr, 20.12.13

Aufgabe 44 (4 Punkte)**.** Es seien X und Y Zufallsvariablen mit endlichen Wertebereichen $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_m\}$ und $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Die Matrix $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sei gegeben durch

$$\mathrm{D} = \big(\mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j)\big)_{i=1,\ldots,m;j=1;\ldots,n}.$$

Zeigen Sie, dass X und Y genau dann stochastisch unabhängig sind, wenn $\operatorname{Rang} \mathrm{D} = 1$ gilt.

Aufgabe 45 (4 Punkte)**.** In der VL wurde gezeigt, dass jeder Präfix-Code C auf einem endlichen Alphabet $\mathcal{M}$ die Kraft-Ungleichung

$$\sum_{x \in \mathcal{M}} 2^{-l_C(x)} \leq 1$$

erfüllt. Es soll nun gezeigt werden, dass diese für jeden eindeutig codierbaren Code C, d.h. für den $\tilde{C}$ injektiv ist, gilt:

a. Für $k \in \mathbb{N}$ sei C_k die k-Erweiterung von C auf $\mathcal{M}^k$, also $C_k(x_1, \ldots, x_k) = C(x_1) \ldots C(x_k)$. Zeigen Sie

$$\Big(\sum_{x \in \mathcal{M}} 2^{-l_C(x)}\Big)^k = \sum_{y \in \mathcal{M}^k} 2^{-l_{C_k}(y)}.$$

b. Argumentieren Sie, warum die eindeutige Dekodierbarkeit von C

$$\sum_{y \in \mathcal{M}^k} 2^{-l_{C_k}(y)} \leq k \cdot \max_{x \in \mathcal{M}} l_C(x)$$

impliziert. Ordnen Sie hierfür die Summanden der linken Summe nach Codelänge der Wörter an.

c. Folgern Sie durch den Übergang $k \to \infty$ schließlich die Kraft-Ungleichung für eindeutig dekodierbare Codes.

Aufgabe 46 (4 Punkte, L)**.** Eine faire Münze wird 30 Mal geworfen und jeweils notiert, ob «Wappen» oder «Zahl» auf der Oberseite zu sehen ist.

a. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau 15 Mal «Zahl» zu sehen ist sowohl exakt als auch approximativ mit Hilfe des lokalen Grenzwertsatzes.

b. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass «Zahl» mindestens 10 aber höchstens 20 Mal zu sehen ist sowohl exakt als auch approximativ mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes nach de Moivre-Laplace mit und ohne Stetigkeitskorrektur.

Für die Berechnungen dürfen Sie die interaktiven Tabellen unter http://www.mathematik.uni-marburg.de/[tilde]hohmann/stoch0/tabellen/ verwenden.

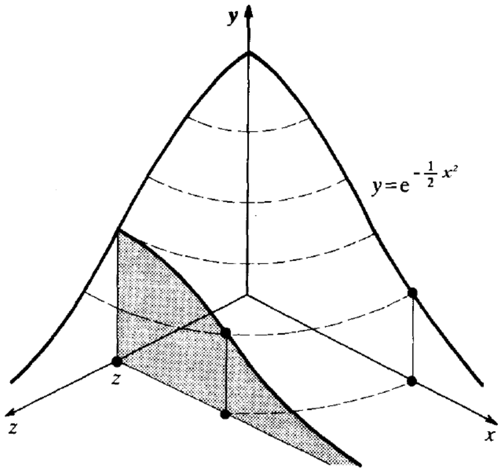
Aufgabe 47 (4 Punkte)**.** Es seien $A_1, \ldots, A_n$ unabhängige Ereignisse mit gleicher Wahrscheinlichkeit $\mathrm{P}(A_k) = p \in (0, 1)$. Zeigen Sie, dass für jede Konstante $K > 0$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}\Big(\Big|\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k} - np\Big| \geq K\Big) = 1.$$

Aufgabe 48 (8 Punkte, L)**.** Im Zusammenhang mit dem Gauß'schen Fehlerintegral ergibt sich eine schöne Gelegenheit zur Verbindung von Analysis und Stochastik: Das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \mathrm{d}x \qquad (1)$$

lässt sich nicht elementar mit Hilfe einer Stammfunktion lösen. Im folgenden wird ein alternativer Weg vorgestellt, der auch mit schulischen Mitteln möglich ist.



a. Zeigen Sie zunächst, dass das uneigentliche Integral in (1) existiert. Schätzen Sie dafür den Integranden stückweise durch Ihnen bekannte, integrierbare Funktionen ab.

b. Die Funktion $f(x) = e^{-x^2/2}$ schließt im Intervall $]-\infty, \infty[$ zusammen mit der x-Achse ein (laut Teil a endliches) Flächenstück A ein. Zeigen sie, dass der Körper, der durch Rotation dieser Fläche bzw. des Funktionsgraphen um die y-Achse entsteht, das Volumen $V = 2\pi$ hat.

c. Man zerlegt den Rotationskörper durch Schnitte parallel zur x-y-Ebene in „Scheibchen" (siehe Skizze). Begründen Sie, dass die zur Stelle z gehörende Schnittfläche den Flächeninhalt

$$Q(z) = e^{-z^2/2} A$$

besitzt.

d. Folgern Sie $V = A^2$ und leiten Sie damit die Integralformel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$$

her.

Hinweis

Bachelor- und Masterstudenten bearbeiten die Aufgaben 44-47. Lehramtsstudenten bearbeiten die zwei mit 'L' gekennzeichneten Aufgaben sowie eine weitere Aufgaben nach Wahl.