**Fachbereich Mathematik und Informatik** **Wintersemester 2013/14**
**Philipps-Universität Marburg**
**Prof. Dr. M. Vetter, M. Eulert**

# Aufgabenblatt 1

**zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie**

(Abgabe der Lösungen: bis 31. Oktober 2013, 12:00 Uhr)

**Präsenzaufgabe 1.** (*0 Punkte*)

Es sei $\Omega_0 = \{1, 2, 3, 4\}$. Betrachten Sie das Mengensystem

$$\mathcal{A} = \big\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\big\}.$$

a) Ist $\mathcal{A}$ durchschnittstabil?

b) Erzeugt $\mathcal{A}$ die $\sigma$-Algebra $\mathcal{P}(\Omega_0)$?

c) Wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß durch seine Werte auf $\mathcal{A}$ eindeutig bestimmt?

**Präsenzaufgabe 2.** (*0 Punkte*)

Es sei $X = (X_1, \ldots, X_d)^T$ ein Zufallsvektor mit $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$ für $i = 1, 2, \ldots, d$.

Zeigen Sie, dass seine Kovarianzmatrix $\Sigma(X)$ die Identität

$$\Sigma(X) = \mathbb{E}\big((X - \mu)(X - \mu)^T\big), \quad \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_d)^T,$$

erfüllt und symmetrisch und nicht-negativ definit (i.e. positiv definit oder positiv semidefinit) ist!

**Aufgabe 1.** (*4 Punkte*)

a) Sei $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4\}$.
Beweisen *oder* widerlegen Sie, dass ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P$ auf $\big(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1)\big)$ durch Angabe der Werte
$$P\big(\{1, 2\}\big) = P\big(\{2, 3\}\big) = \frac{1}{2}$$
eindeutig festgelegt ist!

b) Sei $\Omega_2 = \{1, 2\}$ und für ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P$ auf $\big(\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2)\big)$ der Wert $P\big(\{1\}\big)$ angegeben. Ist $P$ dadurch eindeutig festgelegt? Gilt das auch, wenn $P$ ein allgemeines endliches Maß ist?

**Aufgabe 2.** *(4 Punkte)*

Zeigen Sie: Ist $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $d \in \mathbb{N}$, so ist

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_d)^T \colon \Omega \to \mathbb{R}^d$$

genau dann ein Zufallsvektor, wenn für jedes $i = 1, 2, \dots, d$ die Funktion $X_i \colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable ist.

**Aufgabe 3.** *(4 Punkte)*

Es sei $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)^T \colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ ein Zufallsvektor auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Zeigen Sie, dass für die Kovarianzmatrix $\Sigma(X)$ von $X$ gilt, dass

$$\det\big(\Sigma(X)\big) = 0,$$

genau dann, wenn die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots, X_d$ $P$-fast sicher linear abhängig sind, so dass also für $a_i, b \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \dots, d)$ gilt:

$$P(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_d X_d = b) = 1.$$

*Hinweis:* Überlegen Sie sich zunächst, dass für eine quadratintegrierbare Zufallsvariable $Z$ aus $\mathbb{E}(Z^2) = 0$ folgt, dass $P\big(|Z| > 0\big) = 0$. Was impliziert das?

**Aufgabe 4.** *(4 Punkte)*

Beweisen Sie, dass die Menge der Unstetigkeitsstellen einer Verteilungsfunktion $F^\mu$ zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ abzählbar ist!

*Hinweis:* Wie viele Sprungstellen mit Sprunghöhe $1/n$ für $n \in \mathbb{N}$ kann eine Verteilungsfunktion maximal haben?