Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. M. Vetter, M. Eulert

Wintersemester 2013/14

Aufgabenblatt 10

zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

(Abgabe der Lösungen: bis 23. Januar 2014, 12:00 Uhr)

Präsenzaufgabe 1. (*0 Punkte*)

Seien $X, X_1, X_2, \ldots$ d-dimensionale Zufallsvektoren und $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ eine gleichmäßig stetige Abbildung.

Beweisen Sie, dass die Folge $\big(g(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ in Wahrscheinlichkeit gegen $g(X)$ konvergiert, falls $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Wahrscheinlichkeit gegen X konvergiert!

Präsenzaufgabe 2. (*0 Punkte*)

Zeigen Sie, dass eine Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann in Wahrscheinlichkeit gegen eine Zufallsvariable X konvergiert, wenn jede Teilfolge von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine fast sicher gegen X konvergente Teilfolge besitzt.

Aufgabe 1. (*3 Punkte*)

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, so dass $X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit bestimmten $\mu_n \in \mathbb{R}$ und $\sigma_n > 0$.

Zeigen Sie, dass die zugehörige Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen $(P_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann straff ist, wenn die Folgen $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\sigma_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt sind!

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Zeigen Sie, dass eine Zufallsvariable X, gegen die die Folge in Wahrscheinlichkeit konvergiert, genau dann existiert, wenn für alle $\epsilon > 0$ gilt, dass

$$\lim_{m,n\to\infty} P\big(|X_m - X_n| \geq \epsilon\big) = 0.$$

Hinweis: Für eine Richtung können Sie das Lemma von Borel–Cantelli benutzen. An welchen bekannten Folgenbegriff aus der Analysis erinnert die Darstellung in der hervorgehobenen Zeile?

Aufgabe 3. *(5 Punkte)*

Seien $F, F_1, F_2, \dots$ Verteilungsfunktionen auf $\mathbb{R}$.

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

a) Für alle stetigen und beschränkten Funktionen $g \in C_b(\mathbb{R})$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int g \,\mathrm{d}F_n = \int g \,\mathrm{d}F.$$

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\limsup_{n\in\mathbb{N}} F_n(x) \leq F(x)$ und $\liminf_{n\in\mathbb{N}} F_n(x-) \geq F(x-)$, wobei $G(x-)$ für eine Funktion G definiert ist als $\lim_{h\to 0} G(x-h)$.

c) Die Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise auf allen Stetigkeitspunkten von F gegen F.

d) Für alle stetigen Funktionen mit kompaktem Träger $g \in C_c(\mathbb{R})$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int g \,\mathrm{d}F_n = \int g \,\mathrm{d}F.$$

Hinweis: Beweisen Sie a) $\Rightarrow$ b), b) $\Rightarrow$ c), c) $\Rightarrow$ a), a) $\Rightarrow$ d), d) $\Rightarrow$ c). Sie dürfen dabei allgemeine Resultate aus Kapitel 5 der Vorlesung verwenden, die Sie hier entsprechend spezialisieren können.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*

Seien $X, X_1, X_2, \dots$ d-dimensionale Zufallsvektoren und $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ eine stetige Abbildung.

a) Zeigen Sie, dass aus der Verteilungskonvergenz der Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die Verteilung von X folgt, dass auch $\big(g(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ in Verteilung gegen $g(X)$ konvergiert! Schließen Sie daraus, dass die Komponenten einer verteilungskonvergenten Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d-dimensionaler Zufallsvektoren ebenfalls in Verteilung konvergieren!

b) Beweisen Sie, dass die Folge $\big(g(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ in Wahrscheinlichkeit gegen $g(X)$ konvergiert, falls $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Wahrscheinlichkeit gegen X konvergiert!