Fachbereich Mathematik und Informatik **Wintersemester 2013/14**
Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. M. Vetter, M. Eulert

Aufgabenblatt 11

zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

(Abgabe der Lösungen: bis 30. Januar 2014, 12:00 Uhr)

Präsenzaufgabe 1. (*0 Punkte*)

Sei μ das Wiener-Maß auf dem messbaren Raum $\big(C([0,1]), \mathcal{B}_C\big)$ und sei X ein Zufallselement („stochastischer Prozess") mit Verteilung μ.

Zeigen Sie, dass X unabhängige Zuwächse besitzt, i.e. die Zufallsvariablen

$$\Pi_{t_2}(X) - \Pi_{t_1}(X),\ \Pi_{t_3}(X) - \Pi_{t_2}(X),\ \ldots,\ \Pi_{t_n}(X) - \Pi_{t_{n-1}}(X)$$

sind unabhängig, wobei $\Pi_t(X) = X(t)$ für $t \in [0,1]$ und $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n \le 1$ eine beliebige Zerlegung des Einheitsintervalls ist.

Präsenzaufgabe 2. (*0 Punkte*)

Sei X ein Wiener Prozess auf $[0,1]$ und sei $\mathcal{P}_n \coloneqq \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1\}$ eine Zerlegung des Einheitsintervalls mit Feinheit

$$s(\mathcal{P}_n) \coloneqq \max_{k=1,\ldots,n} (t_k - t_{k-1}).$$

Für $p > 0$ definieren wir die *Variation des Wiener Prozesses X auf $\mathcal{P}_n$* durch

$$V(\mathcal{P}_n, p, X) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \big|\Pi_{t_k}(X) - \Pi_{t_{k-1}}(X)\big|^p.$$

Zeigen Sie, dass für eine Folge $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zerlegungen von $[0,1]$ mit $s(\mathcal{P}_n) \to 0$ für $n \to \infty$ gilt:

$$V(\mathcal{P}_n, p, X) \xrightarrow{P} \begin{cases} \infty & p < 2 \\ 1 & p = 2 \\ 0 & p > 2. \end{cases}$$

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*

Sei μ das Wiener-Maß auf $\big(C([0,1]),\mathcal{B}_C\big)$ und sei X ein Zufallselement mit Verteilung μ.

Zeigen Sie:

a) X ist fast sicher auf keinem Intervall monoton.

b) X ist fast sicher auf keinem Intervall Lipschitz stetig.

Hinweis: Argumentieren Sie über die Variation von X.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{A},P)$ mit endlicher Varianz und $\mathcal{F}\subset\mathcal{A}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathcal{A}$.

Wir definieren die *bedingte Varianz von X gegeben $\mathcal{F}$* durch $\operatorname{Var}(X|\mathcal{F}) := \mathbb{E}(X^2|\mathcal{F}) - \big(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})\big)^2$.

Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}\big(\operatorname{Var}(X|\mathcal{F})\big) + \operatorname{Var}\big(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})\big).$$

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*

Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $\big([0,1],\mathcal{B}_{[0,1]},\lambda_{[0,1]}\big)$, wobei $\lambda_{[0,1]}$ das auf das Einheitsintervall eingeschränkte Lebesgue-Maß bezeichne, und definieren eine Abbildung S durch

$$\begin{aligned} S\colon \mathcal{B}_{[0,1]} &\to [0,1] \\ B &\mapsto \begin{cases} \sup(B) & \text{falls } B\neq\varnothing \\ 0 & \text{falls } B=\varnothing. \end{cases} \end{aligned}$$

Zeigen Sie für die Funktionen

$$\begin{aligned} Q_1\colon [0,1]\times\mathcal{B}_{[0,1]} &\to \mathbb{R} \\ (\omega,B) &\mapsto 1_B(\omega) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} Q_2\colon [0,1]\times\mathcal{B}_{[0,1]} &\to \mathbb{R} \\ (\omega,B) &\mapsto 1_B(\omega) + 1_{\{S(B)\}}(\omega) \end{aligned}$$

die folgenden Eigenschaften:

a) Die Abbildung $\omega\mapsto Q_j(\omega,B)$ (für $j=1,2$) stimmt für jedes $B\in\mathcal{B}_{[0,1]}$ $\lambda_{[0,1]}$-fast sicher mit der bedingten Wahrscheinlichkeit $\lambda_{[0,1]}(B|\mathcal{B}_{[0,1]})$ überein.

b) Q_1 induziert vermöge $B\mapsto Q_1(\omega,B)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}_{[0,1]}$ für jedes $\omega\in[0,1]$.

c) Für Q_2 gilt die entsprechende Aussage zu b) allerdings nicht: Es gibt keine $\lambda_{[0,1]}$-Nullmenge $N\in\mathcal{B}_{[0,1]}$, so dass $B\mapsto Q_2(\omega,B)$ für jedes $\omega\in[0,1]\setminus N$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}_{[0,1]}$ ist.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathcal{A}$.

Zeigen Sie:

a) Falls $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion ist und $\mathbb{E}\big(\varphi(X)\big) < \infty$, dann gilt P-fast sicher

$$\mathbb{E}\big(\varphi(X)|\mathcal{F}\big) \geq \varphi\big(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})\big).$$

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Folge von Punkten $\big((a_n, b_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ existiert mit

$$\varphi(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{a_n x + b_n\}.$$

Argumentieren Sie anschließend mit Lemma 8.5!

b) Falls $\mathbb{E}(|X|^p) < \infty$ für ein $p \geq 1$, so gilt:

$$\big\|\mathbb{E}(X|\mathcal{F})\big\|_p \leq \|X\|_p.$$