Aufgabenblatt 12

zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

(Abgabe der Lösungen: bis 6. Februar 2014, 12:00 Uhr)

Präsenzaufgabe 1.

(0 Punkte)

Formulieren Sie in der Situation des Beispiels von Aufgabe 3 mit eigenen Worten, welche Information Sie aus dem Wissen um $\mathcal{F}_n$ (für ein $n \in \mathbb{N}$) ziehen!

Präsenzaufgabe 2.

(0 Punkte)

Berechnen Sie für die Zufallsvariable T aus Aufgabe 4 die Wahrscheinlichkeit $P(\{T > k\})$ für $k \in \mathbb{N}$. Was können Sie über den Grenzwert dieser Wahrscheinlichkeit für $k \rightarrow \infty$ aussagen?

Aufgabe 1.

(4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ eine Teil- σ -Algebra von $\mathcal{A}$.

Zeigen Sie, dass für eine Folge von reellen Zufallsvariablen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Ω , die fast sicher gegen eine Zufallsvariable X konvergiert und deren Folgenglieder dominiert werden durch eine integrierbare nicht-negative Zufallsvariable V , also $|X_n| \leq V$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{E}(V) < \infty$, gilt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}) = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}).$$

Hinweis: Argumentieren Sie über die monoton fallende Folge $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$Y_n := \sup_{k \geq n} |X_k - X| \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 2.

(4 Punkte)

Sei $X = (X_t)_{0 \leq t \leq 1}$ ein Wiener Prozess auf $C([0, 1])$ und $\mathcal{F}_t := \sigma(X_s : s \leq t)$ die kanonische Filtration. Für eine Folge reeller Zahlen $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $0 < t_1 < t_2 < \dots$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = 1$ definieren wir

$$M_k := \exp(X_{t_k} - t_k/2).$$

Zeigen Sie, dass $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ein nicht-negatives Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_{t_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ist!

Aufgabe 3.

(4 Punkte)

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Die Ungleichung

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|) \leq \mathbb{E}(\sup_{n \in \mathbb{N}} |X_n|)$$

impliziert, dass jedes L^1 -dominierte Martingal (i.e. das Martingal ist dominiert durch eine integrierbare Zufallsvariable) L^1 -beschränkt ist.

Illustrieren Sie anhand des folgenden Beispiels, dass die Umkehrung der Aussage nicht gilt:

Sei $\Omega = \mathbb{N}$ und $P(\{\omega\}) = \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega+1}$ für $\omega \in \Omega$, sowie für $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{F}_n := \sigma(\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}, \mathbb{N} \cap [n+1, \infty))$$

und

$$X_n := X_n(\omega) := (n+1)1_{[n+1, \infty)}(\omega).$$

Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein nicht-negatives Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist, welches zwar L^1 -beschränkt, aber nicht L^1 -dominiert ist.

Aufgabe 4.

(4 Punkte)

Sei $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $P(\{Y_k = 2^k - 1\}) = 2^{-k}$ und $P(\{Y_k = -1\}) = 1 - 2^{-k}$ und eine Filtration $(\mathcal{F}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ definiert durch $\mathcal{F}_n := \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Außerdem sei T erklärt durch $T := \inf\{k \in \mathbb{N} : Y_k \neq -1\}$.

- a) Zeigen Sie zunächst, dass T eine $(\mathcal{F}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ -Stoppzeit ist und dass $P(\{T = \infty\}) > 0$ gilt!

Hinweis: Sie dürfen das Resultat aus Präsenzaufgabe 2 benutzen!

- b) Betrachten Sie dann die Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$X_n := \sum_{i=1}^n (-1)^k 1_{\{T \geq k\}} Y_k,$$

für $n \in \mathbb{N}$. Begründen Sie, dass $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Martingal ist!

- c) Beweisen Sie, dass $\sup_{k \in \mathbb{N}} |X_k|$ fast sicher endlich ist, indem Sie die Wahrscheinlichkeit

$$P(\{\sup_{k \in \mathbb{N}} |X_k| > 2^n\})$$

geeignet abschätzen!

- d) Zeigen Sie mit Verweis auf Aufgabenteil a), dass das Martingal $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dennoch nicht fast sicher konvergiert!