Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. M. Vetter, M. Eulert

Wintersemester 2013/14

Aufgabenblatt 2

zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

(Abgabe der Lösungen: bis 7. November 2013, 12:00 Uhr)

Präsenzaufgabe 1. (*0 Punkte*)

Laut Rechenregeln 1.35 gilt für quadratintegrierbare Zufallsvariablen X, Y, Z und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

- $\operatorname{Cov}(X,Y) = \operatorname{Cov}(Y,X)$
- $\operatorname{Cov}(\alpha X + \beta Y, Z) = \alpha \operatorname{Cov}(X,Z) + \beta \operatorname{Cov}(Y,Z)$
- $\operatorname{Cov}(X, \alpha Y + \beta Z) = \alpha \operatorname{Cov}(X,Y) + \beta \operatorname{Cov}(X,Z)$.

Zeigen Sie die folgende Abschätzung:

$$\left|\operatorname{Cov}(X,Y)\right| \leq \operatorname{Var}(X)^{1/2} \cdot \operatorname{Var}(Y)^{1/2}.$$

Präsenzaufgabe 2. (*0 Punkte*)

Seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i = 1,2$, zwei σ-endliche Maßräume und sei die Funktion $f\colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0,\infty]$ $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 - \overline{\mathcal{B}}$-messbar.

Was besagt der Satz von Fubini für eine solche Funktion f?

Aufgabe 1. (*4 Punkte*)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $X\colon \Omega \to [0,\infty)$ eine nicht-negative Zufallsvariable.

Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

$$\mathbb{E}(X) < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) < \infty.$$

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $X\colon \Omega \to [0, \infty)$ eine nicht-negative Zufallsvariable mit $0 < \mathbb{E}(X^2) < \infty$.

Zeigen Sie die Abschätzung

$$P(X > 0) \geq \frac{\big(\mathbb{E}(X)\big)^2}{\mathbb{E}(X^2)}.$$

Aufgabe 3. *(8 Punkte)*

a) Zeigen Sie, dass die folgende Gleichheit gilt:

$$\int_0^1 \left(\int_{-1}^1 (1 + xy)^{-1} \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Hinweis: Benutzen Sie die folgende bekannte Darstellung der geometrischen Reihe:

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{\nu=0}^{\infty} t^\nu \quad \text{für } |t| < 1.$$

Begründen Sie formal, dass man bei der Berechnung des Ausdrucks die Reihenfolge von $\int$ und $\sum$ vertauschen kann!

b) Bestimmen Sie den Wert der Reihe in Aufgabenteil a), indem Sie das Doppelintegral berechnen!

Hinweis: Substituieren Sie

$$z = z(x) \coloneqq x + \frac{1}{2} y (x^2 - 1).$$

Warum kann hier die Integrationsreihenfolge vertauscht werden? Sie dürfen verwenden, dass

$$u \mapsto \frac{2}{\sqrt{-D}} \arctan\left(\frac{2au + b}{\sqrt{-D}} \right)$$

eine Stammfunktion zu

$$u \mapsto \frac{1}{au^2 + bu + c}$$

ist, falls $D \coloneqq b^2 - 4ac < 0$.