Aufgabenblatt 3

zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

(Abgabe der Lösungen: bis 14. November 2013, 12:00 Uhr)

Präsenzaufgabe 1.

(0 Punkte)

Ein Zufallsvektor $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)^T$ hat eine *Normalenmischungsverteilung*, falls er verteilungsgleich ist mit

$$\mu + \sqrt{W}AZ,$$

wobei

- $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_k)^T$ aus unabhängigen Komponenten besteht, die jeweils univariat standard-normalverteilt sind. Man schreibt kurz: $Z \sim N_k(0, I_k)$.
- $W \geq 0$ eine nicht-negative reellwertige Zufallsvariable ist, die von Z unabhängig ist,
- $\mu \in \mathbb{R}^d$ und $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$.

Beantworten bzw. beweisen Sie:

- Wodurch wird der Name „Normalenmischungsverteilung“ motiviert? Warum ist gerade der Fall $\text{rang}(A) = d \leq k$ von Interesse?
- Bei einem derartig verteilten Zufallsvektor X ergibt sich unter der Bedingung, dass $\mathbb{E}(W) < \infty$, für seinen Erwartungswert $\mathbb{E}(X) = \mu$ und für seine Kovarianzmatrix $\text{Cov}(X) = \mathbb{E}(W)AA^T$.
- Wenn W P -fast sicher konstant ist, dann ist X multivariat normalverteilt.

Bemerkung: Ein Zufallsvektor $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_d)^T$ heißt multivariat normalverteilt, falls eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{d \times k}$ und ein Vektor $c \in \mathbb{R}^d$ existieren, so dass Y die gleiche Verteilung besitzt wie $BV + c$, wobei $V \sim N_k(0, I_k)$.

Präsenzaufgabe 2.

(0 Punkte)

Sei X eine standardnormalverteilte Zufallsvariable und sei W eine von X unabhängige Zufallsvariable, so dass

$$P(W = 1) = P(W = -1) = \frac{1}{2}.$$

Wir definieren $Y := WX$. Zeigen Sie:

- a) $\text{Cov}(X, Y) = 0$,
- b) X ist nicht unabhängig von Y .

Aufgabe 1.

(4 Punkte)

Sei X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert μ_X und Varianz σ_X^2 und sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine deterministische Funktion. Im Allgemeinen gilt dann:

$$\mathbb{E}(f(X)) \neq f(\mathbb{E}(X)).$$

- a) Finden Sie eine reihenbasierte *Approximation* an $\mathbb{E}(f(X))$, indem Sie unterstellen, dass f zweimal stetig differenzierbar ist und dass σ_X klein ist, so dass also X konzentriert ist in der Umgebung von μ_X .
- b) Für eine log-normalverteilte Zufallsvariable $U := \exp(X)$, wobei X normalverteilt ist mit Erwartungswert μ_X und Varianz σ_X^2 , gilt:

$$\mathbb{E}(U) = \exp\left(\mu_X + \frac{1}{2}\sigma_X^2\right).$$

Wenden Sie die Approximation aus Aufgabenteil a) an auf die Funktion $f(x) := \exp(x)$ und für den Fall, dass $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$! Ist die Annäherung gut?

- c) Wie gut ist die Approximation, wenn f ein Polynom vom Grad ≤ 2 ist?

Aufgabe 2.

(4 Punkte)

Zeigen Sie: Falls der Zufallsvektor $(X_1, X_2)^T$ einer Normalenmischungsverteilung gehorcht mit $\mu = 0$, $A = I_2$ und $\mathbb{E}(W) < \infty$, so sind dessen Komponenten X_1 und X_2 unabhängig genau dann, wenn die Zufallsvariable W P -fast sicher konstant ist.

Hinweis: Sie können für eine Richtung die Jensen-Ungleichung verwenden und mit Aufgabe 1 c) argumentieren, um aus

$$\mathbb{E}(W) = (\mathbb{E}(W^{1/2}))^2$$

den entsprechenden Schluss zu ziehen.

Aufgabe 3.

(4 Punkte)

Zeigen Sie: Sei $(\mathcal{E}_i)_{i \in I}$ eine unabhängige Familie von durchschnittstabilen Mengensystemen auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\mathcal{E}_i \subset \mathcal{A}$ für alle $i \in I$ und sei $(I_j)_{j \in J}$ eine disjunkte Zerlegung von I , so sind auch die $(\mathcal{A}_j)_{j \in J}$ mit

$$\mathcal{A}_j := \sigma\left(\bigcup_{i \in I_j} \mathcal{E}_i\right)$$

unabhängig.

Hinweis: Setzen Sie für $j \in J$

$$\tilde{\mathcal{E}}_j := \left\{ \bigcap_{k \in K} E_k : K \subset I_j \text{ endlich und } E_k \in \mathcal{E}_k, \text{ für } k \in K \right\}$$

und beweisen Sie, dass

- a) $\tilde{\mathcal{E}}_j$ durchschnittstabil ist für alle $j \in J$,
- b) $\sigma(\tilde{\mathcal{E}}_j) = \mathcal{A}_j$ für alle $j \in J$,
- c) $(\tilde{\mathcal{E}}_j)_{j \in J}$ eine unabhängige Familie ist.

Aufgabe 4.

(4 Punkte)

Betrachten Sie den messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ mit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$!

Definieren Sie darauf ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmaß P und geben Sie zwei Mengensysteme $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{P}(\Omega)$ an, so dass aus der Unabhängigkeit von $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ bezüglich P nicht die Unabhängigkeit der von ihnen erzeugten σ -Algebren folgt!