Fachbereich Mathematik und Informatik **Wintersemester 2013/14**
Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. M. Vetter, M. Eulert

Aufgabenblatt 4

zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

(Abgabe der Lösungen: bis 21. November 2013, 12:00 Uhr)

Präsenzaufgabe 1. (*0 Punkte*)

Was ist zu zeigen, damit auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ für Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und X gilt, dass

$$X_n \to X \quad \text{für } n \to \infty \ P\text{-f.s.?}$$

Präsenzaufgabe 2. (*0 Punkte*)

Wir definieren für eine Folge reeller Zahlen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge der *Cesàro-Mittel* durch

$$c_n \coloneqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

für $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, dass aus $x_k \to x$ für $k \to \infty$ und $x \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ folgt, dass $c_n \to x$ für $n \to \infty$.

Präsenzaufgabe 3. (*0 Punkte*)

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\log(k)}$$

divergiert.

Aufgabe 1. (*4 Punkte*)

Sei Ω eine beliebige Menge.

a) Zeigen Sie für beliebige Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, dass

$$1_{\liminf A_n} = \liminf 1_{A_n},$$

wobei $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n \coloneqq \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \bigcap\limits_{k\geq i} A_k$ und 1_A die Indikatorfunktion für die Menge $A \subset \Omega$ darstelle.

b) Sei nun $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Geben Sie eine Voraussetzung an, unter der $\liminf 1_{A_n}$ eine Zufallsvariable ist!

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Zeigen Sie, dass aus

$$P\big(\{\omega \in \Omega\colon \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = \infty\}\big) = 1$$

folgt, dass

$$\text{für jedes } c > 0 \text{ gilt, dass } P(X_n \leq c) \to 0 \quad \text{für } n \to \infty. \tag{$*$}$$

Bemerkung: Die Aussage $(*)$ kann definiert werden als: $X_n \to \infty$ für $n \to \infty$ P-stochastisch.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*

Konstruieren Sie eine Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von unabhängigen Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0, so dass

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \to -\infty \quad \text{für } n \to \infty \ P\text{-f.s.}$$

Hinweis: Definieren Sie für $k \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable X_k so, dass sie nur die Werte $-k$ und $k^3 - k$ annehmen kann. Wie müssen Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten wählen, damit X_k zentriert ist? Zeigen Sie zunächst, dass $P(X_k/k \to -1) = 1$.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*

Seien $X_2, X_3, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit

$$P(X_k = k) = P(X_k = -k) = \frac{1}{2k\log(k)}, \qquad P(X_k = 0) = 1 - \frac{1}{k\log(k)}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n+1} X_k \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

P-stochastisch gilt, aber nicht P-f.s.!

Hinweis: Die Nummerierung beginnt nur deswegen bei $k = 2$, weil $\log(1) = 0$. Sie können hier das Resultat aus Präsenzaufgabe 3 verwenden.