Aufgabenblatt 5

zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

(Abgabe der Lösungen: bis 28. November 2013, 12:00 Uhr)

Präsenzaufgabe 1. (*0 Punkte*)

Betrachten Sie unabhängige Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$, so dass X_i die Verteilungsfunktion F^{X_i} besitze für $i = 1, 2, \ldots, n$ und $M_n \coloneqq \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

Zeigen Sie:

$$P(M_n \leq x) = \prod_{i=1}^{n} F^{X_i}(x).$$

Präsenzaufgabe 2. (*0 Punkte*)

Zeigen Sie die folgende Aussage:

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig identisch verteilt. Falls eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit $b_n > 0$ und $b_n \to \infty$ für $n \to \infty$ existiert, so dass

1. $nP(|X_1| > b_n) \to 0$ für $n \to \infty$,
2. $\frac{n}{b_n^2}\mathbb{E}(X_1^2 1_{|X_1|\leq b_n}) \to 0$ für $n \to \infty$,

dann gilt

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mathbb{E}(X_1 1_{|X_1|\leq b_n})}{b_n} \to 0$$

in Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$.

Hinweis: Verwenden Sie die bei b_n abgeschnittenen Zufallsvariablen

$$X_{k,n} \coloneqq X_k 1_{|X_k|\leq b_n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, die fast sicher gegen Null konvergiert. Dann konvergiert auch die Folge der Cesàro-Mittel $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast sicher gegen Null (ohne Beweis!).

Zeigen Sie, dass diese Implikation nicht gilt, wenn man fast sichere Konvergenz gegen Konvergenz in Wahrscheinlichkeit austauscht!

Hinweis: Betrachten Sie eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängiger Zufallsvariablen, so dass X_n für $n \in \mathbb{N}$ die Verteilungsfunktion

$$F^{X_n}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - \dfrac{1}{x+n}, & x > 0. \end{cases}$$

besitzt! Zeigen Sie zunächst, dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt, dass

$$P\left(\frac{M_n}{n} > \varepsilon\right) \le P(C_n > \varepsilon),$$

wobei M_n wie in Präsenzaufgabe 1 definiert ist.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*

Zeigen Sie, dass für eine Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die fast sicher gegen Null konvergiert, nicht gelten muss, dass diese schnell (!) in Wahrscheinlichkeit gegen Null konvergiert!

Hinweis: Betrachten Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum auf der Grundmenge $\Omega = [0,1]$!

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*

Wir definieren X_n auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda|_{[0,1]})$ durch

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 - 2n^2\omega, & 0 \le \omega \le 1/(2n^2) \\ 0, & 1/(2n^2) < \omega \le 1 - 1/(2n^2) \\ 1 - 2n^2 + 2n^2\omega, & 1 - 1/(2n^2) < \omega \le 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass

a) X_n schnell in Wahrscheinlichkeit gegen Null konvergiert,

b) X_n nicht fast sicher gleichmäßig gegen Null konvergiert.

   Bemerkung: Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ nennt man eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen *gleichmäßig konvergent P-f.s.* gegen X, falls eine P-Nullmenge N existiert, so dass

   $$\sup_{\omega\in\Omega\setminus N} \big|X_n(\omega) - X(\omega)\big| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

   (Dieser Konvergenzbegriff impliziert schnelle Konvergenz in Wahrscheinlichkeit.)

   Hinweis: Betrachten Sie die Mengen $\{X_n > 1/2\}$ für $n \in \mathbb{N}$, und leiten Sie einen Widerspruch her!

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*

Wir betrachten erneut das Sankt Petersburg Paradoxon (vgl. Präsenzaufgabe 1 von Aufgabenblatt 0) mit Auszahlung X in einem Münzspiel modelliert durch

$$P(X = 2^k) = 2^{-k}, \quad k \geq 1.$$

Bei n-facher Wiederholung des Spiels mit $n \in \mathbb{N}$ kann man das asymptotische Verhalten der Summe $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ untersuchen, wobei $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig identisch verteilt sind nach P_X.

a) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} S_n/n = \infty$ P-f.s.

b) Zeigen Sie weiter, dass
$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n \log_2(n)} = 1$$
in Wahrscheinlichkeit. (Man kann zeigen, dass diese Konvergenz nicht fast sicher gilt.)

c) Interpretieren Sie diese Grenzaussagen in Bezug auf einen fairen Spielgegenwert für das (wiederholte) Münzspiel!

Hinweis: Benutzen Sie Präsenzaufgabe 2!