

Aufgabenblatt 6

zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

(Abgabe der Lösungen: bis 5. Dezember 2013, 12:00 Uhr)

Präsenzaufgabe 1.

(0 Punkte)

Der *Satz von Scheffé* besagt, dass aus der fast sicheren Konvergenz einer Folge von Wahrscheinlichkeitsdichten bereits die gleichmäßige Konvergenz der Verteilungen folgt. Gilt auch die Umkehrung dieses Satzes?

- Betrachten Sie die in Aufgabe 4 genannten Wahrscheinlichkeitsdichten $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und skizzieren Sie deren Graphen für $n = 2, 3$.
- Zeigen Sie, dass *keine* Teilfolge von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fast überall gegen $f_0 = 1_{[0,1]}$ konvergiert.

Präsenzaufgabe 2.

(0 Punkte)

Für Verteilungsfunktionen F und G auf $\mathbb{R}$ definiert man die *Lévy-Metrik* ρ_L durch

$$\rho_L(F, G) := \inf \{ \epsilon > 0 : F(x - \epsilon) - \epsilon \leq G(x) \leq F(x + \epsilon) + \epsilon \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \}.$$

- Machen Sie sich klar, dass es sich bei ρ_L tatsächlich um eine Metrik handelt!
- Bestimmen Sie $\rho_L(F_1, F_2)$, wobei F_1 und F_2 die Verteilungsfunktionen von Bernoulli verteilten Zufallsvariablen sind mit Parameter $p_1 = 3/4$ bzw. $p_2 = 1/2$.

Aufgabe 1.*(4 Punkte)*

Sei X_0 gleichverteilt auf $[0, 1]$ und X_n für $n \in \mathbb{N}$ die diskrete Gleichverteilung auf der Menge

$$\{0, 1/n, \dots, (n-1)/n\}.$$

Zeigen Sie:

- a) Für die zugehörige Folge von Verteilungsfunktionen $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F_0(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

- b) Die entsprechende Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erfüllt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\mathbb{Q}) \neq \mu_0(\mathbb{Q}).$$

- c) Warum ist b) kein Widerspruch zu a)?

Aufgabe 2.*(4 Punkte)*

Zeigen Sie: Sind $F_0, F_1, F_2, \dots$ Verteilungsfunktionen, so konvergiert $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich der Lévy-Metrik ρ_L genau dann gegen F_0 , wenn F_n punktweise für alle Stetigkeitspunkte von F_0 gegen F_0 konvergiert.

Aufgabe 3.*(4 Punkte)*

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie durch Widerspruch, dass fast sichere Konvergenz nicht metrisierbar ist, also dass keine Metrik d_0 auf einer Menge von Zufallsvariablen existiert, so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} d_0(X_n, X) = 0$ genau dann, wenn die Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fast sicher gegen X konvergiert.

Aufgabe 4.*(4 Punkte)*

Seien für $n \in \mathbb{N}$ Wahrscheinlichkeitsdichten f_n auf $\mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 + \sin(2\pi nx) & \text{falls } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und $f_0(x) = 1_{[0,1]}(x)$.

Zeigen Sie:

- a) Für die zugehörigen Verteilungsfunktionen gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \int_{(-\infty, x]} f_0(t) dt \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung: Man kann beweisen, dass diese Konvergenz sogar gleichmäßig (in x) ist.

- b) Für die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsmaße μ_n bzw. μ_0 gilt sogar:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(B) = \mu_0(B) \quad \text{für alle } B \in \mathcal{B}.$$

Hinweis: Es genügt in diesem Fall, die Aussage für einen durchschnittstabilen Erzeuger von $\mathcal{B}$ zu beweisen.

- c) Die Konvergenz in b) ist nicht gleichmäßig (in B), also

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{B \in \mathcal{B}} |\mu_n(B) - \mu_0(B)| > 0.$$