Fachbereich Mathematik und Informatik **Wintersemester 2013/14**
Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. M. Vetter, M. Eulert

Aufgabenblatt 7

zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

(Abgabe der Lösungen: bis 12. Dezember 2013, 12:00 Uhr)

Präsenzaufgabe 1. (*0 Punkte*)

Berechnen Sie die charakteristische Funktion der Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, s]$ für $s > 0$.

Präsenzaufgabe 2. (*0 Punkte*)

Sei F eine Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}$ mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen a_i, $1 \leq i \leq k$, so dass F eingeschränkt auf die Intervalle (a_i, a_{i+1}) für $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ sowie auf $(-\infty, a_1)$ und (a_k, ∞) absolut stetig ist.

F definiert ein *Lebesgue-Stieltjes-Maß* λ_F via $\lambda_F\big((a, b]\big) \coloneqq F(b) - F(a)$ für $b > a$.

Zeigen Sie, dass für eine stetige Funktion g gilt, dass

$$\int g(x)\, F(\mathrm{d}x) \coloneqq \int g(x)\, \lambda_F(\mathrm{d}x) = \int g(x) F'(x)\, \lambda(\mathrm{d}x) + \sum_{i=1}^{k} g(a_i)\big(F(a_i) - F(a_i-)\big),$$

wobei F' die fast überall definierte Ableitung von F und λ das Lebesgue-Maß ist!

Aufgabe 1. (*4 Punkte*)

Seien $Y_1, Y_2, \ldots$ unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen, die gleichverteilt sind auf der Menge $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Wir betrachten die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die für $n \in \mathbb{N}$ erklärt ist durch

$$X_n \coloneqq \sum_{j=1}^{n} Y_j \cdot 10^{-j}.$$

a) Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast sicher gegen eine Zufallsvariable X konvergiert!

b) Beweisen Sie, dass X eine auf dem Einheitsintervall gleichverteilte Zufallsvariable ist!

   Hinweis: Argumentieren Sie über charakteristische Funktionen!

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*

Zeigen Sie am Beispiel der Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen, welche für $n \in \mathbb{N}$ erklärt ist durch $Z_n \sim N(0, n)$, dass die Stetigkeitsbedingung in Korollar 5.29 wesentlich ist!

Bemerkung: Zeigen Sie, dass sowohl die Folge der charakteristischen Funktionen konvergiert als auch die Folge der Verteilungsfunktionen! Was ist das Besondere an den jeweiligen Grenzfunktionen?

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*

Wir betrachten die Dichte der Standardnormalverteilung

$$\phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$$

und die zugehörige charakteristische Funktion

$$\varphi_0(t) = \exp(-t^2/2).$$

Nun definieren wir eine Folge von Wahrscheinlichkeitsdichten $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$f_n(x) = \phi(x)\frac{1-\cos(nx)}{1-\varphi_0(n)}.$$

a) Was sind die zugehörigen charakteristischen Funktionen zu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

   Hinweis: Stellen Sie den Kosinusausdruck mithilfe der *Eulerschen Identität* dar!

b) Zeigen Sie, dass die in a) gefundenen Funktionen für $n \to \infty$ punktweise gegen φ_0 konvergieren!

c) Zeigen Sie weiter, dass die Folge der Wahrscheinlichkeitsdichten $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht fast überall gegen die Funktion ϕ konvergiert!

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*

Sei F_n die Verteilungsfunktion einer auf dem Intervall $[0, n]$ gleichverteilten Zufallsvariable U_n und sei G_0 die Verteilungsfunktion der degenerierten Zufallsvariable $W = 0$. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ die Verteilungsfunktion G_n auf $\mathbb{R}$ durch

$$G_n(x) := \frac{1}{n}F_n(x) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)G_0(x).$$

a) Zeigen Sie, dass G_n für $n \to \infty$ punktweise gegen G_0 auf allen Stetigkeitspunkten von G_0 konvergiert!

b) Zeigen Sie, dass die Momente von G_n für $n \to \infty$ nicht gegen die Momente von G_0 konvergieren!

   Hinweis: Die Momente $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ einer Verteilungsfunktion F sind gegeben durch

$$m_k := \int x^k \, \lambda_F(\mathrm{d}x).$$