Fachbereich Mathematik und Informatik **Wintersemester 2013/14**
Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. M. Vetter, M. Eulert

Aufgabenblatt 8

zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

(Abgabe der Lösungen: bis 19. Dezember 2013, 12:00 Uhr)

Präsenzaufgabe 1. (*0 Punkte*)

Sei $(X_{nk})_{n\in\mathbb{N}}^{k=1,\dots,n}$ ein Dreiecksschema von unabhängigen, quadratintegrierbaren Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, so dass alle Zufallsvariablen ohne Einschränkung der Allgemeinheit zentriert sind. Wir definieren $S_n := X_{n1} + X_{n2} + \cdots + X_{nn}$ und $s_n^2 := \mathrm{Var}(X_{n1}) + \mathrm{Var}(X_{n2}) + \cdots + \mathrm{Var}(X_{nn})$ für $n \in \mathbb{N}$. Es sei $s_n^2 > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir sagen, dass für $(X_{nk})_{n\in\mathbb{N}}^{k=1,\dots,n}$ die *Aussage des Zentralen Grenzwertsatzes* (*ZGS*) *gilt*, falls

$$\lim_{n\to\infty} P\big(\{S_n/s_n \le y\}\big) = \Phi(y)$$

für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt, wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichne.

Rekapitulieren Sie die folgenden beiden Zentralen Grenzwertsätze (mit ihren Voraussetzungen!):

- Lindeberg-Theorem (Satz 6.1 in Vorlesung),
- Lindeberg–Feller-Theorem (s. etwa: *Klenke, 2008, Wahrscheinlichkeitstheorie, Satz 15.43*).

Präsenzaufgabe 2. (*0 Punkte*)

Die *Quantilsfunktion* einer Verteilungsfunktion F ist die verallgemeinerte Inverse $F^{-1}\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F^{-1}(p) := \inf\big\{x \in \mathbb{R} \colon F(x) \ge p\big\}.$$

Man kann zeigen, dass F^{-1} eine linksstetige Funktion ist, deren Wertebereich mit dem Träger von F (i.e. die kleinste abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{R}$, deren Komplement eine λ_F-Nullmenge ist) übereinstimmt, und die daher oft unbeschränkt ist.

Beweisen Sie: Sei F eine Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}$ und F^{-1} ihre Quantilsfunktion. Dann gilt für jedes $0 < p < 1$ und alle $x \in \mathbb{R}$:

$$F^{-1}(p) \le x \iff p \le F(x).$$

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*

Zeigen Sie:

a) Aus der punktweisen Konvergenz (auf allen Stetigkeitspunkten von F) einer Folge von Verteilungsfunktionen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die Verteilungsfunktion F folgt, dass die zugehörige Folge von Quantilsfunktionen $(F_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise (auf allen Stetigkeitspunkten von F^{-1}) gegen die Quantilsfunktion F^{-1} der Grenzverteilung konvergiert!

   Hinweis: Betrachten Sie $F_n(Z)$, wobei Z eine normalverteilte Zufallsvariable ist und begründen Sie zunächst, dass $F_n(Z)$ schwach konvergiert! Geben Sie mithilfe von Präsenzaufgabe 2 die Verteilungsfunktion der Grenzverteilung an! An welchen Stellen ist diese insbesondere stetig?

b) Falls eine Folge von (reellwertigen) Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ schwach konvergiert, so existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ und eine Folge von Zufallsvariablen $(X_n')_{n\in\mathbb{N}}$ auf Ω', so dass X_n' für alle $n \in \mathbb{N}$ die gleiche Verteilung besitzt wie X_n und so dass $(X_n')_{n\in\mathbb{N}}$ sogar fast sicher konvergiert.

   Hinweis: Verwenden Sie für die Konstruktion eine auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable!

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*

Sei $Y_1, Y_2, \dots$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen definiert durch

$$P\big(\{Y_1 = 1\}\big) = P\big(\{Y_1 = -1\}\big) = \frac{1}{2}$$

und für $k \geq 2$

$$P\big(\{Y_k = \pm 1\}\big) = \frac{1}{4}, \quad P\big(\{Y_k = \pm k\}\big) = \frac{1}{4k^2}, \quad P\big(\{Y_k = 0\}\big) = \frac{k^2-1}{2k^2}.$$

Zeigen Sie:

a) Die Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt die Lindeberg-Bedingung nicht.

b) Für $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt nicht die Aussage des Zentralen Grenzwertsatzes.

   Hinweis: Sie dürfen das Lindeberg–Feller-Theorem benutzen.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*

Wir betrachten erneut die Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Aufgabe 2 und definieren für $n \in \mathbb{N}$ das Dreiecksschema $(\tilde{Y}_{nk})_{n\in\mathbb{N}}^{k=1,\dots,n}$ mittels Trunkierung als

$$\tilde{Y}_{nk} \coloneqq \begin{cases} Y_k & \text{falls } |Y_k| \leq \sqrt{n} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

sowie $\tilde{S}_n \coloneqq \tilde{Y}_{n1} + \cdots + \tilde{Y}_{nn}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie:

a) Das Dreiecksschema $(\tilde{Y}_{nk})_{n\in\mathbb{N}}^{k=1,\dots,n}$ erfüllt die Aussage des Zentralen Grenzwertsatzes.

b) Die summierten Folgen $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind „äquivalent“ in dem folgenden Sinn:

$$\lim_{n\to\infty} P\big(\{S_n \neq \tilde{S}_n\}\big) = 0.$$

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, wann „trunkiert“ wird!

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*

Finden Sie eine Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von unabhängigen Zufallsvariablen, so dass

a) für $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Aussage des Zentralen Grenzwertsatzes gilt,

b) $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aber nicht die Lindeberg-Bedingung erfüllt.

Hinweis: Summen unabhängiger normalverteilter Zufallsvariablen sind ebenfalls normalverteilt.