Aufgabenblatt 9

zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

(Abgabe der Lösungen: bis 16. Januar 2014, 12:00 Uhr)

Präsenzaufgabe 1.

(0 Punkte)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung und $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, die in Verteilung gegen die Zufallsvariable X konvergiert.

Zeigen Sie: Falls die Folge $(f(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar ist, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X)).$$

Hinweis: Argumentieren Sie mithilfe der folgenden Abschätzung:

$$|\mathbb{E}(Y_n) - \mathbb{E}(Y)| \leq |\mathbb{E}(Y_n) - \mathbb{E}(Y_n \wedge r)| + |\mathbb{E}(Y_n \wedge r) - \mathbb{E}(Y \wedge r)| + |\mathbb{E}(Y \wedge r) - \mathbb{E}(Y)|,$$

wobei $r > 0$, $Y_n := f(X_n)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $Y := f(X)$.

Aufgabe 1.

(4 Punkte)

Konstruieren Sie eine *mind map*, in der Sie die folgenden 24 Begriffe sinnvoll durch verbindende Pfeile und kurze Kommentare miteinander verknüpfen:

- 1) Borel-Cantelli-Lemma
- 2) charakteristische Funktion
- 3) Dreiecksschema
- 4) fast sichere Konvergenz
- 5) Feller-Bedingung
- 6) gleichgradige Integrierbarkeit
- 7) Kolmogorov-Ungleichung
- 8) Konvergenz in Verteilung
- 9) Konvergenz in Wahrscheinlichkeit
- 10) $\mathcal{L}^p$ -Konvergenz

- 11) Lindeberg-Bedingung
- 12) Normalverteilung
- 13) Null-Eins-Gesetz
- 14) relative Kompaktheit
- 15) Satz von Cramér-Wold
- 16) Satz von Prohorov
- 17) schwache Konvergenz
- 18) Schwaches Gesetz der großen Zahlen
- 19) Starkes Gesetz der großen Zahlen
- 20) Stetigkeitssatz von Lévy
- 21) Straffheit
- 22) terminale σ -Algebra
- 23) Unabhängigkeit
- 24) Zentraler Grenzwertsatz

Aufgabe 2.

(4 Punkte)

Betrachten Sie die beiden Folgen $(\tilde{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängiger Zufallsvariablen, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$P(\{\tilde{X}_n = \pm 1\}) = \frac{1}{2}(1 - n^{-2}), \quad P(\{\tilde{X}_n = \pm n\}) = \frac{1}{2}n^{-2}$$

und $P(\{X_n = \pm 1\}) = \frac{1}{2}$.

Wir verwenden für $n \in \mathbb{N}$ die Schreibweise

$$\tilde{S}_n = \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \cdots + \tilde{X}_n, \quad S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

- a) Zeigen Sie zunächst, dass $(\tilde{S}_n/\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ sich asymptotisch wie $(S_n/\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ verhält, also für jedes $\epsilon > 0$ gilt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{|\tilde{S}_n/\sqrt{n} - S_n/\sqrt{n}| > \epsilon\}) = 0,$$

und schließen Sie daraus, dass für $(\tilde{S}_n/\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ die Aussage des Zentralen Grenzwertsatzes gilt!

Hinweis: Konstruieren Sie zunächst aus der Folge $(\tilde{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, die die genannten Eigenschaften der Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erfüllt! Trunkieren Sie anschließend die Glieder der Folge $(\tilde{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ geeignet!

- b) Welchen Grenzwert erwarten Sie für die jeweilige Folge der zugehörigen Varianzen von $(\tilde{S}_n/\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(S_n/\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$? Berechnen Sie diese beiden Werte explizit!

Aufgabe 3.

(4 Punkte)

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen, quadratintegrierbaren Zufallsvariablen, die die Aussage des Zentralen Grenzwertsatzes erfüllt: Wir bezeichnen für $n \in \mathbb{N}$ mit F_n die Verteilungsfunktion von $(S_n - \mathbb{E}(S_n)) / (\text{Var}(S_n))^{1/2}$, wobei $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

Die Konvergenz $F_n(x) \rightarrow \Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, für $n \rightarrow \infty$ gilt wegen der Stetigkeit von Φ sogar gleichmäßig auf $\mathbb{R}$. Das impliziert, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n(x)}{\Phi(x)} = 1$$

gleichmäßig in $x \in [a, b]$, wobei $-\infty < a < b < \infty$.

Zeigen Sie am Beispiel von unabhängigen Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots$ mit Parameter $0 < p < 1$, dass nicht für beliebige Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} -a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ gilt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [a_n, b_n]} \left| \frac{F_n(x)}{\Phi(x)} - 1 \right| = 0.$$

Hinweis: Berechnen Sie $F_n(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4.

(4 Punkte)

Zeigen Sie:

- a) Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, die in Verteilung gegen eine Zufallsvariable X konvergiert und $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_n|^p) < \infty$ für ein $p > 0$ erfüllt. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n^k) = \mathbb{E}(X^k) \quad \text{für alle } 0 < k < p.$$

Hinweis: Benutzen Sie Präsenzaufgabe 1.

- b) Seien X_n (für alle $n \in \mathbb{N}$) und X Zufallsvariablen, so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n^p) = \mathbb{E}(X^p) < \infty$ für jedes $p \in \mathbb{N}$. Falls die Verteilung von X eindeutig durch ihre Momente bestimmt ist, so konvergiert die Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Verteilung gegen X .

Hinweis: Begründen Sie zunächst die Straffheit der Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$! Argumentieren Sie dann mit a), dass die schwache Grenze jeder Teilfolge von $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eindeutig festgelegt ist!