

Aufgabenblatt 11

zur Vorlesung Zeitreihenanalyse

(Besprechung der Lösungen: 22. Januar 2014, 14:15 Uhr)

Aufgabe 21.

Es sei $(X_1, \dots, X_{p+1})^T$ ein Zufallsvektor mit Erwartungswert 0 und invertierbarer Kovarianzmatrix

$$\Gamma_{p+1} = (\gamma(i-j))_{i,j=1}^{p+1}.$$

Gemäß Bemerkung 2.18 ist in diesem Fall die beste lineare Vorhersage durch

$$P_{\text{span}\{X_1, \dots, X_p\}} X_{p+1} = \phi_1 X_p + \dots + \phi_p X_1$$

gegeben, wobei für den Vektor $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p)^T$ die Relation $\phi = \Gamma_p^{-1} \gamma_p$ mit $\gamma_p = (\gamma(1), \dots, \gamma(p))^T$ gilt.

Zeigen Sie: Das Polynom $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$ besitzt keine Nullstelle für $|z| \leq 1$.

Hinweis: Es ist sinnvoll, wie folgt anzusetzen: Angenommen, $\phi(z)$ besitzt eine derartige Nullstelle. Dann gilt $\phi(z) = (1 - az)\xi(z)$ mit $|a| > 1$. Setze nun $Y_j = \xi(B)X_j$, $\rho = \text{Corr}(Y_{p+1}, Y_p)$ und $\tilde{\phi}(z) = (1 - \rho z)\xi(z)$. Zeige dann zunächst

$$\mathbb{E}[|\phi(B)X_{p+1}|^2] = \mathbb{E}[|\tilde{\phi}(B)X_{p+1}|^2],$$

folgere daraus $\rho = a$ und leite zuletzt einen Widerspruch zur Invertierbarkeit von Γ_{p+1} her.

Aufgabe 22.

Es sei $\{X_t | t \in \mathbb{Z}\}$ eine stationäre Zeitreihe mit Kovarianzmatrix

$$\Gamma_{p+1} = (\gamma(i-j))_{i,j=1}^{p+1}.$$

für jedes $p \in \mathbb{N}$.

Beweise oder widerlege:

- a) Ist Γ_{p+1} invertierbar, so existiert ein $\text{AR}(p)$ -Prozess mit Autokovarianzen $\gamma(0), \dots, \gamma(p)$.
- b) Ist Γ_{p+1} invertierbar, so existiert ein $\text{MA}(p)$ -Prozess mit Autokovarianzen $\gamma(0), \dots, \gamma(p)$.