Fachbereich Mathematik und Informatik **Wintersemester 2013/14**
Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. M. Vetter

Aufgabenblatt 3

zur Vorlesung Zeitreihenanalyse

(Besprechung der Lösungen: 6. November 2013, 14:15 Uhr)

Aufgabe 5.

Seien $X_1, \ldots, X_n$ beliebige Realisationen einer stationären Zeitreihe. Zeigen Sie, dass für die Schätzer $\hat{\gamma}(h)$ der Autokovarianzfunktion die Beziehung

$$\sum_{|h|<n} \hat{\gamma}(h) = 0$$

gilt.

Hinweis: Geeignet übersetzt bedeutet das nur, dass für $y_1, \ldots, y_n$ mit $\sum_{i=1}^n y_i = 0$ auch $(\sum_{i=1}^n y_i)^2 = 0$ ist.

Aufgabe 6.

Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und es gelte für eine reellwertige Folge $(X_n)_n$ und $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ die Konvergenz in Verteilung

$$\sqrt{n}(X_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Beweisen Sie die Delta-Methode, wonach folgt:

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(\mu)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, (g'(\mu))^2\sigma^2).$$

Hinweis: Abgesehen vom Mittelwertsatz der Differentialrechnung fußt der Beweis auf dem Zusammenspiel von Konvergenz in Verteilung und Konvergenz in Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe 7.

Wir betrachten den besten linearen Vorhersager $\hat{X}_{n+1}$ im Sinne von Bemerkung 2.18. Zeigen Sie, dass für den Vorhersagefehler $\hat{\sigma}_n^2 = \mathbb{E}[(\hat{X}_{n+1} - X_{n+1})^2]$ die Relation

$$\hat{\sigma}_n^2 = \gamma(0) - \gamma_n^T \Gamma_n^{-1} \gamma_n^T$$

gilt, falls die Matrix Γ_n invertierbar ist.